

A. Spočítejte obsahy ploch:

1.  $P = \{[x, y, z]; x^2 + y^2 = 1, y^2 + z^2 \leq 1\}$ .
2.  $P = \{[x, y, z]; x^2 + y^2 + z^2 = 1, x^2 + y^2 \leq x\}$ .
3.  $P = \{[x, y, z]; (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} + z = 1, z \geq 0\}$ .
4.  $P = \{[x, y, z]; x^2 - y^2 = 2z, z \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$ .

B. Spočítejte délky křivek:

1.  $\gamma = \{[3t, 3t^2, 2t^3]; t \in \langle 0, 1 \rangle\}$ .
2.  $\gamma = \{[x, y, z]; (x - y)^2 = x + y, x^2 - y^2 = \frac{9}{8}z^2\}$  z bodu  $[0, 0, 0]$  do bodu  $[1, 0, \frac{2\sqrt{2}}{3}]$ .
3.  $\gamma = \{[x, y, z]; x^2 + y^2 = z, \frac{y}{x} = \operatorname{tg} z, x > 0, y > 0\}$  z bodu  $[0, 0, 0]$  do bodu  $[\sqrt{\frac{\pi}{8}}, \sqrt{\frac{\pi}{8}}, \frac{\pi}{4}]$ .
4.  $\gamma = \{[e^{-t} \cos t, e^{-t} \sin t, e^{-t}]; t \in \langle 0, \infty \rangle\}$ .

C. Spočítejte křivkové a plošné integrály 1. druhu.

1.  $\int_{\gamma} (x^2 + y^2 + z^2) ds$ , kde  $\gamma = \{[\cos t, \sin t, t] : t \in \langle 0, 2\pi \rangle\}$ .
2.  $\int_{\gamma} (|x|^{\frac{3}{4}} + |y|^{\frac{3}{4}}) ds$ , kde  $\gamma = \{[x, y] : |x|^{\frac{2}{3}} + |y|^{\frac{2}{3}} = 1\}$ ,
3.  $\int_{\gamma} x^2 ds$ , kde  $\gamma = \{[x, y, z] : x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y + z = 0\}$ ,
4.  $\int_P (x + y + z) dS$ , kde  $P = \{[x, y, z] : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ ,
5.  $\int_P \frac{1}{(1+x+y)^2} dS$ , kde  $P$  je povrch tělesa  $\{[x, y, z] : x + y + z \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$ ,
6.  $\int_P |xyz| dS$ , kde  $P = \{[x, y, z] : z = x^2 + y^2, z \leq 1\}$ .

D. Spočítejte křivkové a plošné integrály 2. druhu.

1.  $\int_{\gamma} (x^2 - 2xy) dx + (y^2 - 2xy) dy$ , kde  $\gamma = \{[x, y] : y = x^2, x \in \langle -1, 1 \rangle\}$ ,
2.  $\int_{\gamma} (x + y) dx + (x - y) dy$ , kde  $\gamma = \{[x, y] : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\}$  probíhaná ve směru hodinových ručiček,
3.  $\int_{\gamma} \frac{dx+dy}{|x|+|y|}$ , kde  $\gamma$  je obvod čtverce s vrcholy o souřadnicích  $[1, 0]$ ,  $[0, 1]$ ,  $[-1, 0]$ ,  $[0, -1]$  probíhaný proti směru hodinových ručiček.
4.  $\int_P x dy dz + y dz dx + z dx dy$ , kde  $P$  je jednotková sféra orientovaná vně,
5.  $\int_P (y - z) dy dz + (z - x) dz dx + (x - y) dx dy$ , kde  $P$  je vnější strana plochy  $\{[x, y, z] : x^2 + y^2 = z^2, 0 \leq z \leq 1\}$ ,
6.  $\int_P x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy$ , kde  $P$  je vnější strana sféry o poloměru 1 a středu  $[1, 1, 1]$ .

E. Pomocí Greenovy věty spočtete křivkové integrály:

1.  $\int_{\gamma} xy^2 dy - x^2y dx$ , kde  $\gamma$  je jednotková kružnice probíhaná proti směru hodinových ručiček,
2.  $\int_{\gamma} (x + y) dx - (x - y) dy$ , kde  $\gamma$  je elipsa  $\{[x, y] : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\}$  probíhaná ve směru hodinových ručiček,
3.  $\int_{\gamma} (e^x \sin y - my) dx + (e^x \cos y - mx) dy$ , kde  $\gamma$  je horní půlkružnice  $\{[x, y] : x^2 + y^2 = ax\}$  probíhaná od bodu  $[a, 0]$  do bodu  $[0, 0]$ .

F. Pomocí Stokesovy věty spočtete křivkové integrály:

1.  $\int_{\gamma} y dx + z dy + x dz$ , kde  $\gamma$  je kružnice  $\{[x, y, z] : x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y + z = 0\}$  probíhaná proti směru hodinových ručiček,
2.  $\int_{\gamma} (x^2 - yz) dx + (y^2 - xz) dy + (z^2 - xy) dz$ , kde  $\gamma$  je část křivky  $\{[\cos t, \sin t, \frac{t}{2\pi}] : t \in R\}$  probíhaná od bodu  $[1, 0, 0]$  do bodu  $[1, 0, 1]$ ,
3.  $\int_{\gamma} (y - z) dx + (z - x) dy + (x - z) dz$ , kde  $\gamma = \{[x, y, z] : x^2 + y^2 = 1, x + z = 1\}$  probíhaná proti směru hodinových ručiček, díváme-li se na ní z osy  $x$ .

G. Pomocí Gaussovy věty spočtete plošné integrály:

1.  $\int_P x^3 dy dz + y^3 dz dx + z^3 dx dy$ , kde  $P$  je vnější strana jednotkové sféry,
2.  $\int_P (x - y + z) dy dz + (y - z + x) dz dx + (z - x + y) dx dy$ , kde  $P$  je vnější strana plochy  $\{[x, y, z] : |x - y + z| + |y - z + x| + |z - x + y| = 1\}$ ,
3.  $\int_P x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy$ , kde  $P$  je vnější strana krychle  $\{[x, y, z] : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$ ,
4. Objem anuloidu.
5. Objem tělesa, ohraničeného plochou  $\{[u \cos v, u \sin v, -u + a \cos v] : u \geq 0, v \in (0, 2\pi)\}$  a rovinami  $x = 0, z = 0$ .

H. Pomocí věty o potenciálu spočtete:

1.  $\int_{\gamma} x dy + y dx$ , kde  $\gamma$  je libovolná křivka spojující body  $[-1, 2]$  a  $[2, 3]$ ,
2.  $\int_{\gamma} \frac{y dx - x dy}{x^2}$ , kde  $\gamma$  je libovolná křivka spojující  $[2, 1]$  a  $[1, 2]$ , která neprotíná osu  $y$ ,
3.  $\int_{\gamma} \left( \sin \frac{y}{x} - \frac{y}{x} \cos \frac{y}{x} \right) dx + \cos \frac{y}{x} dy$ , kde  $\gamma$  je libovolná křivka spojující  $[1, \pi]$  s  $[2, \pi]$ , která neprotíná osu  $y$ .