Definice. Obyčejnou diferenciální rovnicí [illegible] :

$$(1) \qquad F(x,y,y') = 0,$$

kde $F = F(x,y,z)$ je nekonstantní vůči z. Řešením (1) je funkce $y(x): I \to \mathbb{R}$, kde $I \subset \mathbb{R}$ je otevřený interval, $y'(x)$ existuje vlastní pro $\forall x \in I$, a

$$F(x, y(x), y'(x)) = 0 \quad \forall x \in I.$$

Poznámka: **Věta:** nechť $f(x)$ je spojitá v I. Pak existuje $F(x): I \to \mathbb{R}$ tak, že $F'(x) = f(x)$ $\forall x \in I$. $F(x)$ je primitivní fce příslušná k $f(x)$ v I; $F(x) = \int f(x)\,dx$ v I

Věta: Nechť $F(x)$, $G(x)$ mají vlastní derivaci v I. Pak je ekvivalentní:

1) $F'(x) = G'(x)$ pro $\forall x \in I$

2) $\exists C \in \mathbb{R}$ tak, že $F(x) = G(x) + C$ pro $\forall x \in I$.

Definice. Lineární ODR 1. řádu rozumíme

$$y' + a(x)y = b(x) \qquad (2)$$

Věta 12.1. Nechť $a(x), b(x)$ jsou spojité v I. Nechť $A(x) = \int a(x)\,dx$,

$B(x) = \int b(x) \exp A(x)\,dx$, a nechť $C \in \mathbb{R}$ je libovolné.

Potom $y(x) = \exp(-A(x))\left[B(x) + C\right]$ je řešení (2) v I.

Dk.: $A(x) = \int a(x)\,dx$; násob (2) $\exp A(x)$

tzv. „integrační faktor".

$$y'(x) \exp A(x) + y(x)\, a(x) \exp A(x) = b(x) \exp A(x)$$

$$\left[y(x) \exp A(x)\right]' = \left[B(x)\right]'$$

neboť $\left[\exp A(x)\right]' = A'(x) \exp A(x) = a(x) \exp A(x)$

$$\Rightarrow \exists C;\ y(x) \exp A(x) = B(x) + C$$

řada ekvivalentních úprav.

$$y(x) = \exp A(x)\left[B(x) + C\right].$$

Příklad $y' + y\cos x = \exp(-\sin x)$;

$a = \cos x; \quad A = \sin x$

$/ \cdot \exp(\sin x)$

$$y'\exp(\sin x) + y\cos x\exp(\sin x) = 1$$

$$[y\exp(\sin x)]' = 1 = [x]'$$

$\exists C \in \mathbb{R}: \quad y\exp(\sin x) = x + C$

$$y = (x+C)\exp(-\sin x); \quad x \in \mathbb{R}.$$

Definice. Rovnice
$$y' = g(y)f(x) \qquad (3)$$
se nazývá rovnice se separovanými proměnnými.

Věta 12.2. Nechť $f(x)$ je spojitá v I, nechť $g(y)$ je spojitá a nenulová v J. Nechť $F(x)$, $G(y)$ jsou a.f. k $f(x)$, $\frac{1}{g(y)}$ v I resp. J. Označ $G_{-1}(y)$ funkci inverzní ke $G(y)$. Nechť $\tilde{I} \subset I$, a $C \in \mathbb{R}$ jsou zvoleny tak, že $F(x) + C \in D(G_{-1}) = G(J)$ pro $\forall x \in \tilde{I}$. Potom

(4) $$y(x) = G_{-1}(F(x)+C), \quad x \in \tilde{I}$$

je řešení (3).

dk.: $g(y)$ spoj. nenulová $\Rightarrow$ $g(y)$ nemění znaménko $\Rightarrow$ $G'(y) = \frac{1}{g(y)}$ je buď rostoucí nebo klesající

$G_{-1}(z): K \to J$, kde $K = G(J)$

spojitá

$\Rightarrow y(x)$ (def. v (4))

má vlastní derivaci v $\tilde{I}$ | G_{-1} má vlastní derivaci v K

($F(x)+C: \tilde{I} \to K$, | (neboť $G'(y) \neq 0$ v J,

$G_{-1}(z): K \to \mathbb{R}$ | Věta o derivaci inv. fce.)

mají vlastní derivaci)

Věta o derivaci složené fce...)

? zkusit rce. $y(x) = G^{-1}(F(x)+C)$; G

$$G(y(x)) = F(x)+C \quad \Big/ \, '$$

$$y'(x)\frac{1}{g(y(x))} = G'(y(x))\cdot y'(x) = (F(x)+C)' = F'(x) = f(x)$$

$$F'(x) = f(x);\quad G'(y) = \frac{1}{g(y)}$$

Příklad $y' = \sqrt{1-y^2}$; $g(y)$ - spojitá, nenulová v $J = (-1,1)$

$$\frac{y'}{\sqrt{1-y^2}} = 1$$

$y\in(-1,1)$ -- $\arcsin y \in \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

$$(\arcsin y)' = (x)'$$

$\arcsin y = x + C$ -- C - pevné: $x\in I$ tak, že

$$x+C \in \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$$

$y = \sin(x+C)$, $x\in\left(-\frac{\pi}{2}-C, \frac{\pi}{2}-C\right)$

Příklad: $y' = 2\sqrt{|y|}$; $g(y) = 2\sqrt{|y|}$

$f(x) = 1$

$g(y)$ - spojité, nenulové v $(-\infty,0)$, $(0,\infty)$.

hledáme $y(x): I\to J$; $I = \mathbb{R}$, $J = (-\infty,0)$.

$$\frac{y'}{2\sqrt{|y|}} = 1 \qquad \int \frac{1}{2\sqrt{-y}}\,dy = -\sqrt{-y} = G(y)$$

$$\frac{y'}{2\sqrt{-y}} = 1$$

$$(-\sqrt{-y})' = (x)'$$

$-\sqrt{-y} = x + C$ $\quad$ C zvoleno: $\boxed{x+C\in G(J) = (-\infty,0) \quad x\in(-\infty,-C) = I}$

$$\sqrt{-y} = -(x+C)$$

$$-y = (-(x+C))^2$$

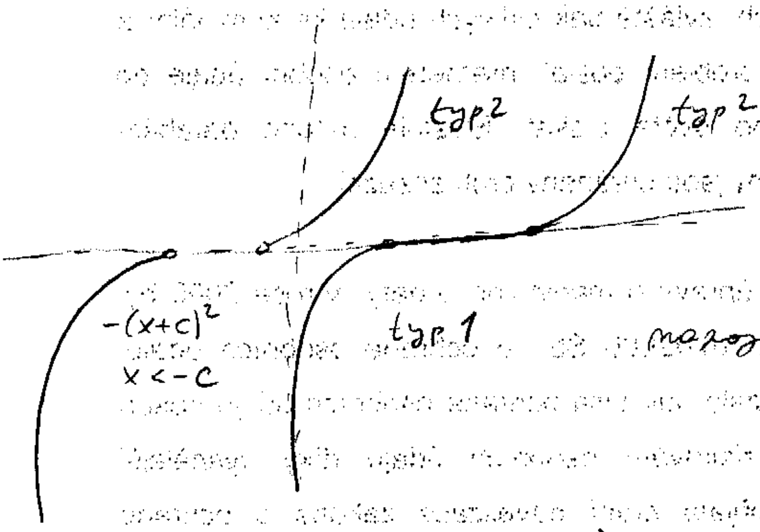
$y = -(x+C)^2$; $x\in(-\infty,-C)$. „typ 1"

Pozor: $y(x) = -(x+c)^2$ není řešení na $(-c,+\infty)$.

analogicky: $y(x): \mathbb{R} \to (0,\infty)$; $J = (0,\infty)$

$$y(x) = (x+c)^2 ; \quad x \in I = (-c, +\infty) \quad \text{„typ 2"}$$

Kromě toho: $y(x) = 0$; $x \in \mathbb{R}$ ... je zřejmé řešení



Lemma 12.1 (O napojování) Nechť $y_1(x): (a, x_0) \to \mathbb{R}$, $y_2(x): (x_0, b) \to \mathbb{R}$ jsou řešení (1) $y' = f(x,y)$. Nechť $\lim_{x\to x_0-} y_1(x) = \lim_{x \to x_0+} y_2(x) = y_0$. Nechť $f(x,y)$ je spojitá v bodě $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$. Potom funkce

$$y(x) = \begin{cases} y_1(x); & x \in (a, x_0) \\ y_2(x); & x \in (x_0, b) \\ y_0; & x = x_0 \end{cases}$$

je řešení (1) na celém intervalu (a,b).

dk.: dl. $y'(x)$ existuje a $y'(x) = f(x, y(x))$ pro $\forall x \in (a,b)$

$x \neq x_0$ ... zjevné (y_1, y_2 jsou řešení)

? $x = x_0$

$$y'(x_0) = \lim_{x\to x_0} y'(x) = \lim_{x \to x_0} f(x, y(x)) = f(x_0, y(x_0))$$

$y(x)$ spojitá v x_0, Věta

rce splněna pro $x \neq x_0$

$x \to x_0$: $y(x) \to y(x_0) = y_0$, $f(x,y)$ spojitá v (x_0, y_0)

Příklad. $y(x) = \begin{cases} 0, & x \le -c \\ (x+c)^2; & x > -c \end{cases}$

(nesplnění typu 2 a 3 →) je řešení na $\mathbb{R}$

věta řeší: obecné rovnice bodě nenulové (lepení)

možné slepení je OK

Poznámka. Obecný postup pro $y' = g(y) f(x)$

1. pokud $g(y_0) = 0$ ... $y(x) = y_0$ je tzv. singulární (stacionární) řešení na každém $I \subset \mathcal{D}(f)$.

2. pomocí V. 12.2. hledáme řešení tvaru $y(x) : I \to J$; $f(x)$ spojité na I, $g(y)$ spoj. & nenulová na J

3. pomocí L. 12.1 slepuji tato řešení, pokud to jde.

Poznámka. Další typy rovnic

1. $y' = h(x, y)$;

kde $h(\lambda x, \lambda y) = h(x, y)$, se nazývá homogenní rovnice

Řeší se takto: položíme $y(x) = x z(x)$, ← nová neznámá funkce

$$y'(x) = (x z(x))' = z(x) + x z'(x) = h(x, x z(x))$$
$$= h(1, z(x))$$

Tj. $z + x z' = h(1, z)$

$$z' = \{h(1, z) - z\} \cdot \frac{1}{x}$$ ... rce se separovanými proměnnými...

$x = 0$ – problém, musí se řešit zvlášť...

2. Bernoulliho rovnice:

$$y' + a(x)y = b(x)y^{\alpha} \quad ; \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}.$$

(pro $\alpha = 0,1$ je lineární)

$$z = y^{1-\alpha}$$

$$y' y^{-\alpha} + a(x) y^{1-\alpha} = b(x) \quad / \cdot (1-\alpha)$$

$$y' y^{-\alpha}(1-\alpha) + (1-\alpha)a(x) \cdot y^{1-\alpha} = (1-\alpha)b(x)$$

$$z' + \tilde{a}(x) z = \tilde{b}(x) \quad ; \quad z = y^{1-\alpha}$$

$$\tilde{a}(x) = (1-\alpha)a(x)$$

$$\tilde{b}(x) = (1-\alpha)b(x)$$

Vyšetřujeme rovnici $y' = f(x,y)$ (1).

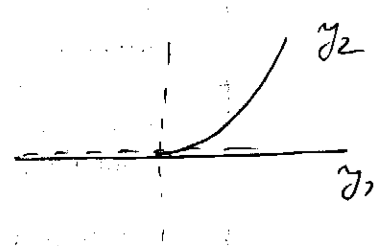
Definice. Řekneme, že řešení $y(x)$ rce (1) prochází bodem $(x_0,y_0)\in \mathbb{R}^2$,
jestliže (i) $y(x)$ je definováno na nějakém $U(x_0)$
(ii) $y(x_0)=y_0$. ⟵ počáteční podmínka.

Bod $(x_0,y_0)\in \mathbb{R}^2$ se nazve bodem větvení, jestliže jím procházejí dvě řešení $y_1(x)$, $y_2(x)$, která se neshodují na žádném $U(x_0)$.
(Tj. $\forall \delta>0\ \exists \tilde{x}\in U(x_0,\delta)$ tak, že $y_1(\tilde{x})\neq y_2(\tilde{x})$.)

Příklad. $y' = 2\sqrt{|y|}$; $(0,0)$.. bod větvení

$y_1(x) = 0;\ x\in \mathbb{R}$

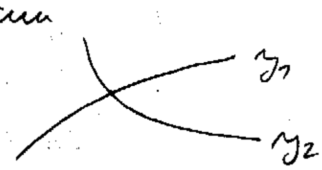
$$y_2(x) = \begin{cases} 0; & x\le 0 \\ x^2; & x>0 \end{cases}$$



Poznámka. $y(x)$ řešení (1) prochází bodem (x_0,y_0).

$$\Rightarrow y'(x_0) = f(x_0,\underset{\displaystyle y(x_0)}{\underset{\shortparallel}{y_0}}).$$

důsledek: větvící se řešení mají stejnou tečnu (nemohou se „křížit") rovnice (1).



Věta 12.3* Nechť $f(x,y)$ je spojitá na okolí bodu $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$.
Potom bodem (x_0,y_0) prochází alespoň jedno řešení rovnice (1).

Podrobně: $\exists\, \delta>0$ a fce $y(x): (x_0-\delta, x_0-\delta)\to\mathbb{R}$,
které je řešení (1), a splňuje $y(x_0)=y_0$.

__Věta 12.4.__* Nechť funkce $f(x,y)$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ jsou spojité na okolí bodu $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$. Potom bodem (x_0,y_0) prochází řešení rovnice (1), které je __lokálně__ jednoznačné.

Podrobněji: (i) $\exists\, y(x)$ řešení (1), které prochází bodem (x_0,y_0)

(ii) je-li $\tilde{y}(x)$ jiné řešení, procházející (x_0,y_0),

pak $\exists\, \delta>0$ tak, že $y(x)=\tilde{y}(x)$ pro $\forall x\in U(x_0,\delta)$

(ii) jinak: (x_0,y_0) není bodem větvení!

__Příklad.__ $y'=2\sqrt{|y|}$; $f(x,y)=2\sqrt{|y|}$ .. spojitá v $\mathbb{R}^2$

V. 12.3 $\Rightarrow$ každým bodem z $\mathbb{R}^2$ prochází aspoň jedno řešení

$$\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}2\sqrt{|y|}=\frac{\operatorname{sgn} y}{\sqrt{|y|}}\,;\ \text{pro } y\neq 0.$$

$\uparrow$ spojitá v $\mathbb{R}^2\setminus\{(x,y);\, y=0\}$.

$\frac{\partial}{\partial y}f(x,0)$ .. neexistuje

V. 12.4 $\Longrightarrow$ větvení může nastat pouze v bodech tvaru $(x,0)$; $x\in\mathbb{R}$.

__Definice.__ Řešení $y(x)$ dané ODR se nazývá maximální, jestliže neexistuje prodloužení; tj. řešení $\tilde{y}(x)$ na $\tilde{I}$, kde $I\subset\tilde{I}$ a $y(x)=\tilde{y}(x)$ pro $\forall x\in I$.

__Příklad:__ $y(x)=x^2$; $x\in(0,+\infty)$ .. řešení $y'=2\sqrt{|y|}$, není maximální:

$$\tilde{y}(x)=\begin{cases} x^2; & x>0\\ 0; & x\le 0\end{cases}$$ je prodloužení.

náš cíl: najít všechna maximální řešení.

řešení $y(x): (a,b) \to \mathbb{R}$ nejde prodloužit za bod $x = b$, pokud
(re (1))

(i) $b = +\infty$

nebo (ii) $y(x) \to \pm\infty$ pro $x \to b-$

nebo (iii) $y(x) \to y_0$ pro $x \to b-$, leč $f(x,y)$ není definována v bodě (b, y_0).

---

jak poznám, že mám všechna řešení:

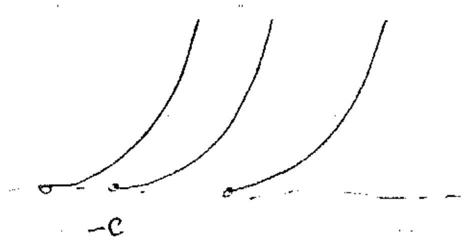
$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ tak, že $f, \frac{\partial}{\partial y} f$ spojité v Ω

najdu $\{y_c(x)\}_{c \in \mathbb{R}}$ .. systém řešení, které „vyplní" Ω.

pak v Ω nejsou jiná řešení než $y_c(x)$.

Příklad: $y' = 2\sqrt{|y|}$; $y_c(x) = (x+c)^2$; $x \in (-c, +\infty)$

$\Omega = \{(x,y);\ y > 0\}$; $f, \frac{\partial}{\partial y} f = \frac{\operatorname{sgn} y}{\sqrt{|y|}} \in C(\Omega)$.



Definice. Rovnice $y' = f(x,y)$ se nazve homogenní, jestliže fce $f(x,y)$ splňuje $f(\lambda x, \lambda y) = f(x,y)$ pro $\forall \lambda > 0$.

Postup: polož $y(x) = x \cdot z(x)$; kde $z(x)$ nová neznámá funkce

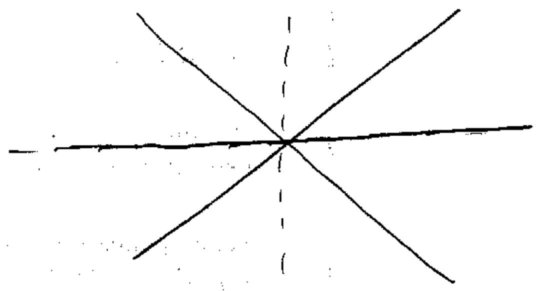
$$y'(x) = [x\, z(x)]' = z(x) + x\, z'(x) = f(x, x\, z(x)) = f(1, z(x))$$

$$z' = [f(1,z) - z] \cdot \frac{1}{x}$$

rce se separovanými proměnnými

platí mimo $x = 0$.

Příklad. $(x^2+y^2)\, y' = 2xy$ $(*)$



$$y' = \frac{2xy}{x^2+y^2} \quad \dots \text{ homogenní}$$

$y = x \cdot z$;

$$y' = x z' + z = \frac{2x \cdot x z}{x^2 + x^2 z^2} = \frac{2z}{1+z^2}$$

$$z' = \frac{2z}{1+z^2} - z = \frac{z(1-z^2)}{1+z^2} \cdot \frac{1}{x}$$

singulární řešení: $z_1 = 0$; $z_2 = 1$; $z_3 = -1$

$$\left.\begin{aligned} y_1 &\equiv 0 \\ y_2 &= x \\ y_3 &= -x \end{aligned}\right\} \quad x \in \mathbb{R} \text{ řeší } (*).$$

$$z'\left(\frac{1+z^2}{z(1-z^2)}\right) = \frac{1}{x}; \qquad z(x): I \to J;$$

I ... $(-\infty, 0)$ nebo $(0, +\infty)$

J ... $(-\infty,-1), (-1,0), (0,1), (1,+\infty)$

$$\int \frac{1+z^2}{z(1-z)}\, dz = \int \frac{1}{z} - \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1}\, dz = \ln\left|\frac{z}{z^2-1}\right| \quad \text{v ivl. typu } J$$

$$\ln\left|\frac{z}{z^2-1}\right| = \ln|x| + C \in \mathbb{R}$$

$$\left|\frac{z}{z^2-1}\right| = d \cdot |x|; \qquad d = e^C > 0$$

~~Věta 12.3* Uvažujme rovnici $y' = f(x,y)$ (1) a bod $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$~~

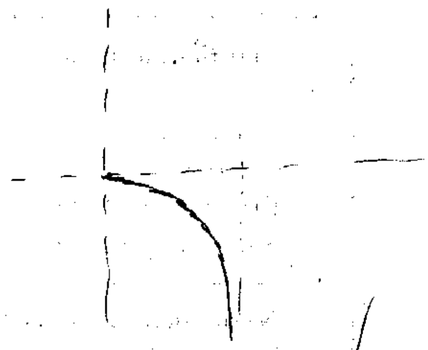
~~(1) Je-li funkce $f(x,y)$ spojitá na nějakém okolí bodu (x_0,y_0), pak existuje $\delta>0$ a $y(x): \mathcal{U}(x_0,\delta) \to \mathbb{R}$ řešení (1) takové, že $y(x_0)=y_0$.~~

~~(2)~~

$$\left|\frac{z}{z-1}\right| = cx^2 \; ; \quad d>0 \; ; \qquad z \in (-\infty,0):$$

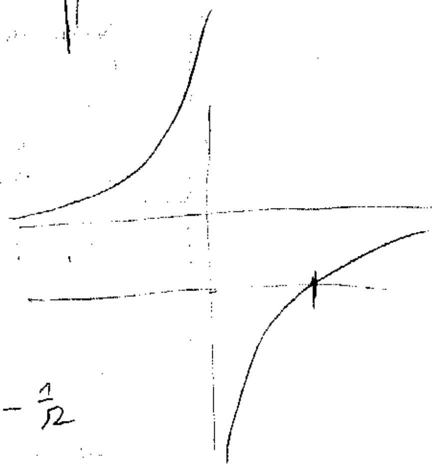
$$\frac{z}{z-1} = cx^2 \in (0,1) \; ; \quad x \in \left(0, \frac{1}{\sqrt{c}}\right)$$

$$z = \frac{cx^2}{cx^2-1} \qquad y(x) = \frac{cx^3}{cx^2-1} \; ;$$



např: $\dfrac{x^3}{x^2-1}$

$$y' = \frac{1}{(x^2-1)^2}\left[3x^2(x^2-1) - x^3 \cdot 2x\right]$$



$$\left|\frac{z-1}{z}\right| = c \cdot x^2 \; ; \quad c>0 \; ; \qquad \frac{z-1}{z} = 1-\frac{1}{z}$$

$$1-\frac{1}{z} = cx^2 \qquad z \in (-\infty,0) : \; G(z)>1$$

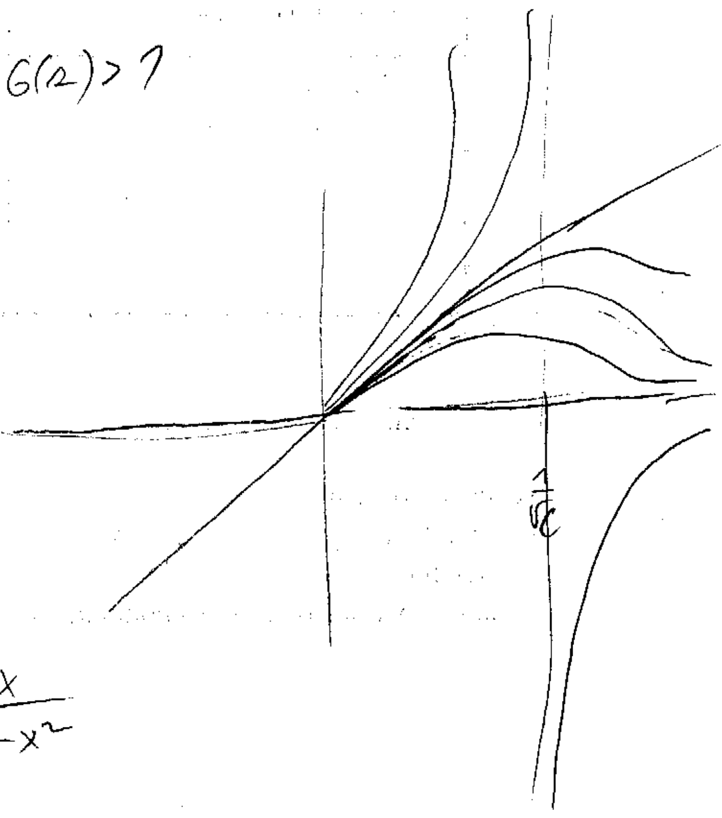
$$cx^2 > 1$$

$$1-cx^2 = \frac{1}{z} \qquad x^2 > \frac{1}{c}$$

$$\boxed{z = \frac{1}{1-cx^2}} \qquad x > \frac{1}{\sqrt{c}} \; ;$$

$$y = \frac{x}{1-cx^2}$$

$$\frac{x}{1-cx^2} - x = \frac{}{1-cx^2} \qquad \frac{x}{1-x^2}$$



B3. **Příklad.** $x^2y' + yx = 2y^2 \to y' = \frac{2y^2 - yx}{x^2}$

polož $y(x) = x\,z(x)$;

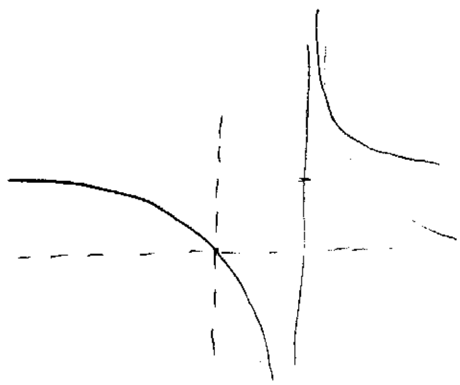
$\boxed{y' = xz' + z}$ $\qquad x \neq 0$ pro výpočet.

$$\cancel{x^2}(xz'+z) + \cancel{x}^2 z = 2\cancel{x}^2 z^2$$

$$xz' = 2z^2 - 2z$$

$$z' = (z^2 - z)\cdot\frac{2}{x} \quad ;$$

řešení: $z \equiv 1,\ z \equiv 0 \ldots \quad \left.\begin{matrix} y_1 = x \ldots \\ y_2 = 0 \ldots \end{matrix}\right\} x \in \mathbb{R}$.



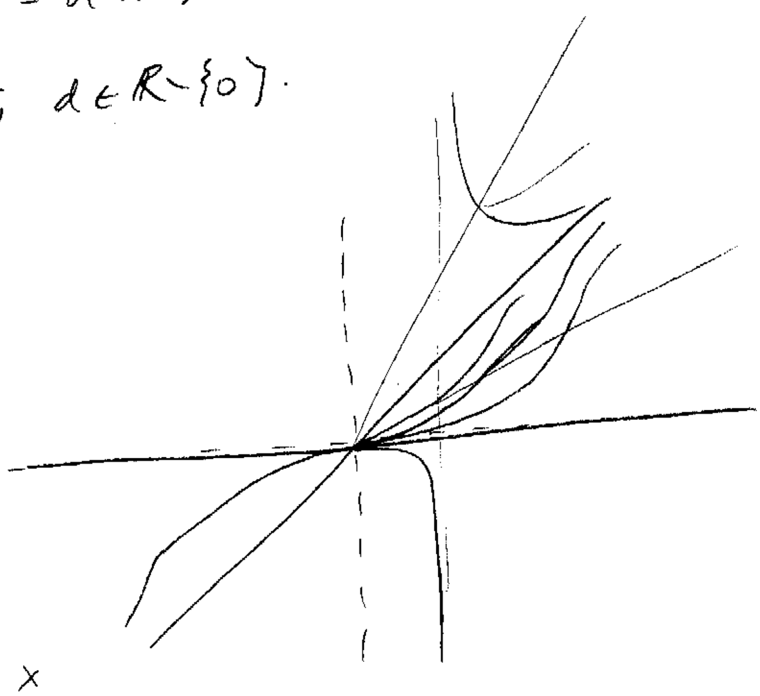
$$\frac{z'}{z(z-1)} = \frac{2}{x} \quad ;$$

$$\ln\left|\frac{z}{z-1}\right| = 2\ln|x| + C$$

$$\left|\frac{z}{z-1}\right| = |x|^2\cdot d = d\cdot x^2; \quad d>0$$

$$\frac{z}{z-1} = d\cdot x^2; \quad d \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

$$z = \frac{dx^2}{dx^2-1}$$



$$y = \frac{cx^3}{cx^2-1}$$

$c = -1$: $\quad \frac{x^3}{1+x^2} < x$

$$\frac{x^3}{1+x^2} - x = \frac{x^3 -}{1+x^2}$$

$$y' = \frac{y(2y-x)}{x^2}$$

$c = 1$: $\quad \frac{x^3}{x^2-1} > x$

1. Diferenciální rovnice - základní pojmy

Definice 1. Nechť $F(x, z_0, z_1, \dots, z_n)$ je reálná funkce $(n+2)$ reálných proměnných definovaná na množině $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+2}$, která není konstantní vzhledem k proměnné z_n. Potom výraz

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \tag{1}$$

nazýváme *(obyčejnou) diferenciální rovnicí n-tého řádu* pro neznámou reálnou funkci $y(x)$ jedné reálné proměnné x.

Definice 2. *Řešením v Ω rovnice* (1) *na neprázdném otevřeném intervalu* $I \subset \mathbb{R}$ rozumíme funkci $y\colon I \to \mathbb{R}$, která má v každém bodě intervalu I vlastní n-tou derivaci a která pro všechna $x \in I$ splňuje

$$\big(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)\big) \in \Omega,$$
$$F\big(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)\big) = 0.$$

Definice 3. Jsou-li funkce $y\colon I \to \mathbb{R}$ a $\tilde{y}\colon \tilde{I} \to \mathbb{R}$ dvě řešení rovnice (1) v Ω taková, že platí $I \subset \tilde{I}$, $I \neq \tilde{I}$ a $y(x) = \tilde{y}(x)$ na intervalu I, pak říkáme, že řešení $\tilde{y}$ je *prodloužením* řešení y na interval $\tilde{I}$ a řešení y je *zúžením* řešení $\tilde{y}$ na interval I. Řešení rovnice (1) pro které neexistuje prodloužení v Ω nazýváme řešení *maximální v Ω*.

2. Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými

2.1. Základní metoda řešení. Uvažujme rovnici

$$y' = g(y)h(x), \tag{2}$$

kde g a h jsou reálné funkce jedné reálné proměnné spojité na svých definičních oborech. Při řešení postupujeme následovně:

1) Určíme maximální otevřené intervaly obsažené v definičním oboru funkce h, tuto kolekci intervalů si označíme $\mathfrak{I}$. Tím máme vymezeny maximální intervaly, na kterých můžeme hledat řešení.
2) Najdeme všechny nulové body funkce g. Je-li $g(c) = 0$, potom funkce $y \equiv c$ na libovolném $I \in \mathfrak{I}$ je *singulární* (též *stacionární*) řešení rovnice (2).
3) Určíme maximální intervaly, na kterých je funkce g nenulová, tuto kolekci intervalů si označíme $\mathfrak{J}$.
4) Pro všechny kombinace intervalů $I \in \mathfrak{I}$ a $J \in \mathfrak{J}$ (tj. h je na I spojitá a g je na J spojitá a nenulová) hledáme řešení rovnice (2) v množině $\Omega = I \times J \times \mathbb{R}$. Pro takové řešení y platí na intervalu I
$$\frac{y'(x)}{g(y(x))} = h(x).$$
Nechť H je primitivní funkce k funkci h na intervalu I a G je primitivní funkce k funkci $1/g$ na J. Potom pro řešení y musí na nějakém podintervalu I platit $G(y(x)) = H(x) + C$ pro nějakou konstantu $C \in \mathbb{R}$.
5) Nyní hledáme řešení rovnice (2) v množině Ω odpovídající nějakému pevnému $C \in \mathbb{R}$. Nalezneme maximální otevřené podintervaly intervalu I, na kterých platí $H(x) + C \in G(J)$. Na každém z těchto intervalů má příslušné řešení tvar
$$y(x) = G^{-1}(H(x) + C).$$
6) Z řešení nalezených v kroku 5) a singulárních řešení z kroku 2) pomocí slepování vytvoříme všechna maximální řešení rovnice (2). Přitom využijeme následujícího faktu: Nechť $y_1\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ a $y_2\colon (b,c) \to \mathbb{R}$ jsou řešení rovnice (2), přičemž $b \in D(h)$. Předpokládejme, že
$$\lim_{x\to b-} y_1(x) = \lim_{x \to b+} y_2(x) = \alpha \in D(g).$$
Potom funkce
$$y(x) = \begin{cases} y_1(x), & x \in (a,b); \\ \alpha, & x = b; \\ y_2(x), & x \in (b,c); \end{cases}$$
je řešením rovnice (2) na intervalu (a,c).

$z \in (0,1)$: $G(z) \in (-\infty, 0)$

$c<0$; $x \in (0,\infty)$ nebo $x \in (\ldots, -\infty, 0)$.

$$\frac{z-1}{z} = +cx^2 = c x^2$$

$$\frac{1}{z} - 1 = cx^2 \qquad y = \frac{x}{cx^2+1} \quad \text{kopeček..}$$

$$\frac{1}{z} = cx^2+1$$

$$z = \frac{1}{cx^2+1};$$

$z \in (1,\infty)$: $G(z) \in (0,1)$: $\frac{z-1}{z} = cx^2$; $c>0 \ldots x \in (0, \frac{1}{\sqrt{c}})$.

$$1 - \frac{1}{z} = cx^2 \qquad y_3 = \frac{x}{1-cx^2};$$

<u>Definice</u>. Rovnice $y' + a(x)y = b(x)y^\alpha$; $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$

se nazývá Bernoulliho rovnice.

<u>Postup řešení</u>: položíme $z(x) = [y(x)]^{1-\alpha}$ ... převádí rovnici pro z, která je lineární.

$$y = z^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

$$y' = \left(\frac{1}{1-\alpha}\right) \cdot z^{\frac{1}{1-\alpha}-1} \cdot z'$$

$$\left(\frac{1}{1-\alpha}\right) z' \cancel{z^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}} + a(x) z^{\frac{1}{1-\alpha}} = b(x) \cancel{z^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}} \quad \Big/ \; z^{\frac{-\alpha}{1-\alpha}}$$

z

D1. $xy' - 4y = x^2\sqrt{y}$; $\quad z = \sqrt{y}$ $\Big/ \frac{1}{2x\sqrt{y}}$

$$\frac{1\, y'}{2\sqrt{y}} - \frac{2}{x}\sqrt{y} = \frac{x}{2}$$

$$z' - \frac{2}{x} z = \frac{x}{2} \;; \quad \text{i.f.:} \quad \frac{1}{x^2}$$

$$\left(\frac{z}{x^2}\right)' = \frac{1}{2x}$$

$$\frac{z}{x^2} = C + \frac{1}{2}\ln|x|$$

$$z = x^2\left(C + \ln\sqrt{|x|}\right) \qquad \text{pozor: } z > 0:$$

$$y = z^2 = x^4\left(C + \ln\sqrt{|x|}\right)^2;$$

$$2C + \ln|x| > 0$$
$$\ln|x| > -2C$$
$$|x| > \exp(-2C).$$

$$x \in (-\infty, -\exp(-2C)), \; (\exp(-2C), \infty).$$

D2 $y' - \frac{xy}{2(x^2-1)} = \frac{x}{2y} \Big| 2y \Big|$ $\quad z = y^2$, $\; z' = 2yy'$

$$2yy' - \frac{x}{x^2-1}y^2 = x \quad \Big/ \quad \text{i.f.: } \exp\left(-\ln\sqrt{|x^2-1|}\right) = \frac{1}{\sqrt{|x^2-1|}}$$

$$\left(\frac{z}{\sqrt{|x^2-1|}}\right)' = \frac{x}{\sqrt{|x^2-1|}}$$

$$\frac{z}{\sqrt{|x^2-1|}} = C + \operatorname{sgn}(x^2-1)\cdot\sqrt{|x^2-1|}$$

$$z = C\sqrt{|x^2-1|} + (x^2-1) \quad ; \; z > 0:$$

$$y = \pm\sqrt{(x^2-1) + C\sqrt{|x^2-1|}}$$

D3

Poznámka $y' = f(x)$

obecné řešení $y(x) = F(x) + C$

$F(x)$: p.f. k $f(x)$; C: libovolné konstanta

řešení je více. $\boxed{y(x_0) = y_0}$ $\Rightarrow$ řešení je jediné. (V. 12.4.)

počáteční podmínka

Pro $x_0 \in \mathbb{R}$; $\underline{\eta} = (\eta_1, \dots \eta_n) \in \mathbb{R}^n$ můžeme počáteční podmínku

$$y(x_0) = \eta_1$$
$$y'(x_0) = \eta_2$$
$$\vdots$$
$$y^{(n-1)}(x_0) = \eta_n$$

Platí: $\underset{\sim}{F}(x, y)$ ... „rozumné" $\Rightarrow$ pro danou počáteční podm. existuje jediné (lokální) řešení

Počáteční podmínka $\quad R_1(x_0) = \eta_1 \quad$ odpovídá $\quad y(x_0) = \eta_1$

$R_2(x_0) = \eta_2 \qquad y'(x_0) = \eta_2$

$\vdots$

$R_n(x_0) = \eta_n \qquad y^{(n-1)}(x_0) = \eta_n$

Závěr: ODR obsahuje l-tou derivaci fce $y(x)$

$\Rightarrow$ potřebuji l počátečních podmínek

typicky $y(x_0), y'(x_0) \dots y^{(l-1)}(x_0)$

v nějakém bodě $\underline{x_0}$.

Definice. Soustavou n ODR 1. řádu rozumíme

$$\underset{\sim}{y}' = \underset{\sim}{F}(x, \underset{\sim}{y}); \qquad (1)$$

podrobněji $\quad y_i' = F_i(x, y_1(x), y_2(x), \dots y_n(x))$, $\quad i = 1, \dots n$

kde $\underset{\sim}{y}(x) = (y_1(x), y_2(x), \dots y_n(x)) : I \to R$ jsou neznámé funkce,

$\underset{\sim}{F} = (F_1, \dots F_n) : R \times R^n \to R^n$ je pravá strana.

Definice. Výraz

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots y^{(n-1)}) \qquad (2)$$

nazýváme ODR n-tého řádu, vyřešenou vzhledem k nejvyšší derivaci.

Věta 12.5 Funkce $y(x): I \to R$ je řešení rce (1), právě když funkce $\underset{\sim}{z}(x): I \to R^n$; kde

$$\boxed{\begin{aligned} z_1(x) &= y(x) \\ z_2(x) &= y'(x) \\ &\vdots \\ z_n(x) &= y^{(n-1)}(x) \end{aligned}} \qquad (*)$$

řeší systém ODR

$$\begin{aligned} z_1' &= z_2 \\ z_2' &= z_3 \\ &\vdots \\ z_{n-1}' &= z_n \\ z_n' &= f(x, z_1, \dots z_n) \end{aligned} \qquad (3)$$

---

dk.: 1. $y(x)$ řeší (2) ... cíl $\underset{\sim}{z}$ splní (3) ...

1. rce: $y' = y'$

2. rce $(y')' = y''$

$\vdots$

$(n-1)$-ní rce: $(y^{(n-2)})' = y^{n-1}$

n-tá rce: $(y^{(n-1)})' = y^{(n)} = f(\underbrace{x, z_1, \dots z_n}_{y, \dots y^{n-1}})$ ... to je (2).

Definice. Lineární diferenciální rovnice řádu n rozumíme

$$(1) \quad \sum_{k=0}^{n} a_k(x) y^{(n-k)} = a_0(x) y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \dots + a_n(x) y = f(x).$$

koeficienty　　　　„pravá strana"

$C(I)$ .. funkce $f(x): I \to \mathbb{R}\ (\mathbb{C})$ spojité.

$C^k(I)$. funkce $f(x): I \to \mathbb{R}\ (\mathbb{C})$, které $f(x), f'(x), \dots f^{(k)}(x)$ spojité v I.

Funkce $y(x) \in C^n(I)$ je řešení, pokud $a_0(x) y^{(n)}(x) + a_1(x) y^{(n-1)}(x) + \dots a_n(x) y(x) = f(x)$ pro $\forall x \in I$.

(P) .. $a_0(x), \dots a_n(x), f(x) \in C(I)$; navíc $a_0(x) \neq 0$ pro $\forall x \in I$.

*) Věta 12.6. Nechť $a_0(x), a_1(x), \dots a_n(x), f(x) \in C(I)$; navíc $a_0(x) \neq 0$ pro $\forall x \in I$. Nechť $x_0 \in I$ a $\eta \in \mathbb{R}^n$ jsou libovolné. Pak existuje jediná funkce $y(x) \in C^n(I)$, která řeší (1), a splňuje počáteční podmínky

$$\begin{aligned} y(x_0) &= \eta_1 \\ y'(x_0) &= \eta_2 \\ &\vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) &= \eta_n . \end{aligned} \qquad (2)$$

Pozn.: rce řádu n $\longleftrightarrow$ n počátečních podmínek

řešení existuje globálně : díky linearitě rce

Značení. Při značení $\mathcal{L}[y] = \sum_{k=0}^{n} a_k(x) y^{(n-k)}$ lze rovnici (1) přepsat jako $\mathcal{L}[y] = f$. Rovnice $\mathcal{L}[y] = 0$ (3). se nazývá homogenní úloha;

(tj. speciální případ (1) pro $f(x) = 0$)

Věta 12.7. Nechť $a_0(x), \dots a_n(x) \in C(I)$, nechť $a_0(x) \neq 0$ pro $\forall x \in I$.

Potom množina $\mathcal{H}$ všech řešení homogenní úlohy (3) tvoří vektorový prostor dimenze n v $C^n(I)$.

dk.: $\mathcal{L}: y(x) \longmapsto a_0(x) y^{(n)}(x) + a_1(x) y^{(n-1)}(x) + \dots + a_n(x) y(x)$

lineární zobrazení z $C^n(I)$ do $C(I)$.

$$\mathcal{L}[y_1+y_2] = \sum_{k=0}^{n} a_k \left[y_1+y_2\right]^{(n-k)} = \sum_{k=0}^{n} a_k \left(y_1^{(n-k)} + y_2^{(n-k)}\right) = \mathcal{L}[y_1] + \mathcal{L}[y_2]$$

$$\mathcal{L}[\alpha y] = \alpha \mathcal{L}[y]$$

$$\mathcal{H} = \{y \in C^n(I);\ \mathcal{L}[y] = 0\} = \operatorname{Ker} \mathcal{L}$$

lineární prostor (Věta z L.A.)

? dim $\mathcal{H} = n$.

ukážeme, že $\mathcal{H}$ je izomorfní s $\mathbb{R}^n$; nechť $x_0 \in I$ pevné, libovolné.

zobrazení $\phi: \mathbb{R}^n \longrightarrow C^n(I)$

$\eta \longmapsto y(x)$ .. to (jediné) řešení úlohy $\mathcal{L}[y]=0$

pro které je
$$y(x_0) = \eta_1$$
$$y'(x_0) = \eta_2 \qquad (*)$$
$$\vdots$$
$$y^{(n-1)}(x_0) = \eta_n$$
(Věta 12.6)

ϕ .. je lineární:

$\eta, \xi \in \mathbb{R}^n$. $\quad \phi(\eta) = y$ .. y splní $(*)$

$\phi(\xi) = z$ $\quad$ z splní: $\quad z(x_0) = \xi_1$, $\ z'(x_0) = \xi_2$, $\ \dots$, $\ z^{(n-1)}(x_0) = \xi_n$

$\Rightarrow z+y$ je řešení, splní

$$(z+y)(x_0) = \eta_1 + \xi_1$$
$$\vdots$$
$$(z+y)^{(n-1)}(x_0) = \eta_n + \xi_n$$

tj. $\phi(\eta + \xi) = z + y = \phi(\eta) + \phi(\xi)$

(1) $\mathcal{L}[y] = f$; $\quad \mathcal{L}: y(x) \longmapsto \sum_{k=0}^{n} a_k(x) y^{(n-k)}(x)$

$$C^n(I) \longrightarrow C(I).$$

(P) $a_k(x), f(x) \in C(I)$; $a_0(x) \neq 0$ pro $\forall x \in I$.

$\times$V. 12.6: $x_0 \in I$; $\eta \in \mathbb{R}^n$ libovolné: $\exists!\, y(x)$ řeší (1); $\quad y(x_0) = \eta_1$, $y'(x_0) = \eta_2$, $\vdots$, $y^{(n-1)}(x_0) = \eta_n$.

V. 12.7. homogenní úloha: $f = 0$: $\mathcal{L}[y] = 0$ (3)

$$\mathcal{H} = \{ y \in C^n(I);\ \mathcal{L}[y] = 0 \} \ldots \text{ prostor dimenze } n \text{ v } C^n.$$

Definice: Fundamentálním systémem úlohy (3) rozumíme libovolnou bázi prostoru $\mathcal{H}$. Tj. F.S. je n-tice fcí $\{y_1(x), \ldots y_n(x)\}$ takové, že

$\tilde{y}(x)$ .. libovolné řešení (3) $\Rightarrow$ $\exists$ jednoznačně určené $c_1, \ldots c_n \in \mathbb{R}$ tak, že

$$\tilde{y}(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j\, y_j(x).$$

Příklad. $y'' + \frac{2}{x} y' + y = 0$ ... F.S. $\left\{ \frac{\cos x}{x}, \frac{\sin x}{x} \right\}$

v $I = (0, +\infty)$
nebo $(-\infty, 0)$.

? $\frac{\cos x}{x}, \frac{\sin x}{x}$ .. báze $\mathcal{H}$.

- jsou prvky $\mathcal{H}$ (řeší rovn.; d.cv.).

dim $\mathcal{H} = 2$ (= stupni rovnice)

? LN: $c_1 \frac{\cos x}{x} + c_2 \frac{\sin x}{x} \equiv 0 \overset{?}{\Rightarrow} c_1 = c_2 = 0$

$x = \pi$: $-\frac{c_1}{\pi} = 0 \Rightarrow c_1 = 0$; $\quad x = \frac{\pi}{2}$: $c_2 \frac{1}{\pi/2} = 0 \Rightarrow c_2 = 0$.

Věta 12.8. Nechť platí (P). Potom množina $\mathcal{N}_f$ všech řešení rce (1)

má tvar (*) $\mathcal{N}_f = \{ y_P + y \,;\, y \in \mathcal{H} \}$, kde y_P je jedno libovolné,

leč pevně zvolené (tzv. partikulární) její řešení!

dk.: obecná věta z LA: $L: Y \to Z$ lin. zobrazení; pak

$$\{ y \in Y;\ Ly = b \} = \{ y_P + y;\ y \in \operatorname{Ker} L \} \doteq y_P + \operatorname{Ker} L.$$

kde y_P .. jedno pevně zvolené tak, že $L y_P = b$.

$X = C^n;\ L = \mathcal{L};\ Z = C;\ b = f.$

$$\mathcal{N}_f = \{ y \in C^n(I);\ \mathcal{L}[y] = f \}.$$

(*) „$\supset$": $\tilde{y} \in PS$: $\tilde{y} = y_P + y;\ y \in \mathcal{H}$

$$\mathcal{L}[\tilde{y}] = \mathcal{L}[y_P + y] = \mathcal{L}[y_P] + \underbrace{\mathcal{L}[y]}_{=0} = f + 0$$

(*) „$\subset$": $\tilde{y} \in LS$: cíl: $\tilde{y} \in PS$; tj. $\exists\, y \in \mathcal{H}$ tak, že

$$\tilde{y} = y_P + y.$$

položme $y := \tilde{y} - y_P$;

$$\mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[\tilde{y} - y_P] = \mathcal{L}[\tilde{y}] - \mathcal{L}[y_P] = f - f = 0.$$

tj. $y \in \mathcal{H}$; a zřejmě $\tilde{y} = y_P + y$. q.e.d.

Dodatek. y_P .. jedno „partikulární" řešení;

$\{ y_1, \dots, y_n \}$ .. je F.S., homogenní $\mathcal{L}[y] = 0$;

obecné řešení má tvar: $y(x) = y_P(x) + \sum_{j=1}^{n} c_j y_j(x)$;

$\Phi: \mathbb{R}^n \to \mathcal{H}$ … řešení jednoznačné:
řešení určeno jednoznačně (*)
$y = \Phi(\ldots)$.
Φ je izomorfismus vekt. prostorů → zachovává dimenzi
$\dim \mathcal{H} = \dim \mathbb{R}^n = n$.

Definice. Libovolnou bázi prostoru $\mathcal{H}$ nazýváme fundamentální systém řešení úlohy $\mathcal{L}[y]=0$. Tj. F.S. je n-tice funkcí $\{y_1, y_2, \ldots y_n\}$ tak, že každé $\tilde{y}$ řešení (3) lze psát $\tilde{y} = \sum_{k=1}^{n} c_k y_k$, kde c_k jsou jednoznačně určené konstanty.

Příklad. (+) $y'' + y = 0$ .. F.S. $\{\cos x, \sin x\}$

$y = \alpha \cos x + \beta \sin x$ -- řeš. s poč. podm. $y(0) = \alpha$, $y'(0) = \beta$.

Značení. Pro $y(x) \in C^n(I)$ defin. $\underset{\sim}{Y}(x) = \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$

počáteční podmínka (*): $\underset{\sim}{Y}(x_0) = \underset{\sim}{\eta}$.

Lemma 12.2 Je dána rovnice (3) $\mathcal{L}[y]=0$, nechť $\{y_1, y_2, \ldots y_n\}$ je libovolný F.S. úlohy (3) $\mathcal{L}[y]=0$. Pro $x \in I$ defin. matici $n \times n$

$$U(x) = \{U_{ij}(x)\}_{i,j=1}^{n}; \text{ kde } U_{ij}(x) = y_j^{(i-1)}(x).$$

Potom $U(x)$ je regulární pro $\forall x \in I$.

dk.: $U(x)$ má sloupce $Y_j(x)$; $Y_j(x) = \begin{pmatrix} y_j(x) \\ y_j'(x) \\ \vdots \\ y_j^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$.

sporem: $\exists x_0 \in I$; $U(x_0)$ není regulární.

tj. $\exists \underset{\sim}{\eta} \in \mathbb{R}^n$; $U(x_0)\cdot \underset{\sim}{c} = \underset{\sim}{\eta}$ pro žádné $\underset{\sim}{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$.

V. 12.6: $\exists y(x) \in C^n(I)$ řešení (3),

splňující $\underset{\sim}{Y}(x_0) = \underset{\sim}{\eta}$.

$\{y_1, \dots y_n\}$ tvoří F.S.: $\exists \underset{\sim}{c} = (c_1, \dots c_n)$ tak, že

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x).$$

leč: dle úvodního pozorování: $\underset{\sim}{Y}(x) = U(x)\underset{\sim}{c}$; položíme $x = x_0$

$$\underset{\sim}{\eta} = \underset{\sim}{Y}(x_0) = U(x_0)\underset{\sim}{c} \quad \text{spor.}$$

Věta 12.9. [Variace konstant.] Je dána rovnice (1) $\mathcal{L}(y) = f$ a platí (P). Nechť $\{y_1, \dots y_n\}$ je F.S. úlohy (3) $\mathcal{L}(y) = 0$. Jestliže funkce $c_1(x), c_2(x), \dots c_n(x)$ splňují soustavu rovnic pro $\forall x \in I$

$$\begin{aligned} c_1'(x) y_1(x) + c_2'(x) y_2(x) + \dots + c_n'(x) y_n(x) &= 0 \\ c_1'(x) y_1'(x) + c_2'(x) y_2'(x) + \dots + c_n'(x) y_n'(x) &= 0 \qquad (VK) \\ &\vdots \\ c_1'(x) y_1^{(n-1)}(x) + c_2'(x) y_2^{(n-1)}(x) + \dots + c_n'(x) y_n^{(n-1)}(x) &= f(x)/a_0(x) \end{aligned}$$

pak funkce $y(x) = c_1(x) y_1(x) + c_2(x) y_2(x) + \dots + c_n(x) y_n(x)$

řeší rovnici (1).

Poznámka. (VK) ... $U(x)\cdot \underset{\sim}{c}'(x) = \underset{\sim}{b}(x)$; $\quad \underset{\sim}{b}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(x)/a_0(x) \end{pmatrix}$ (n-1) nul

matice z L. 12.2 $\qquad \underset{\sim}{c}(x) = \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ \vdots \\ c_n'(x) \end{pmatrix}$

$U(x)$ – regulární pro $\forall x \in I$

$\Rightarrow$ lze najít $c_i'(x)$ .. integrováním $c_i(x)$..

Dk.: $c_i(x)$ splňují (VK); $\quad y(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j(x) y_j(x)$; cíl: $\mathcal{L}(y) = f$.

$$y'(x) = \sum_{j=1}^{n} \left(c_j(x) y_j(x)\right)' = \sum_{j=1}^{n} \left\{ \underbrace{\cancel{c_j'(x) y_j(x)}}_{(VK)_1} + c_j(x) y_j'(x) \right\}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} c_j(x) y_j'(x).$$

$$y''(x) = \sum_{j=1}^{n} \left\{ c_j(x) y_j'(x) \right\}' = \sum_{j=1}^{n} \left\{ \cancel{c_j'(x) y_j'(x)} + c_j(x) y_j''(x) \right\}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} c_j(x) y_j''(x)$$

$$\vdots$$

$$y^{(n-1)}(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j(x) y_j^{(n-1)}(x). \quad \Big/ \frac{d}{dx}$$

$$y^{(n)}(x) = \underbrace{\sum_{j=1}^{n} c_j'(x) y_j^{(n-1)}(x)}_{} + c_j(x) y_j^{(n)}(x)$$

$$= \frac{f(x)}{a_0(x)} + \sum_{j=1}^{n} c_j(x) y_j^{(n)}(x).$$

$$\mathcal{L}[y] = \sum_{k=0}^{n} a_k(x) y^{(n-k)}(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x) \cdot \left\{ \sum_{j=1}^{n} c_j(x) y_j^{(n-k)}(x) \right\}$$

$$+ a_0(x) \cdot \frac{f(x)}{a_0(x)}$$

$$= f(x) + \sum_{j=1}^{n} c_j(x) \underbrace{\left\{ \sum_{k=0}^{n} a_k(x) y_j^{(n-k)}(x) \right\}}_{= \mathcal{L}[y_j](x) = 0 \ (y_j \text{ řeší } (3))} = f(x).$$

__Definice.__ Rovnice (4) $\sum_{k=0}^{n} b_k y^{(n-k)} = f(x)$, kde $b_k \in \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) jsou pevná čísla, $b_0 \neq 0$.

se nazývá lineární ODR n-tého řádu s konstantními koeficienty.

Značím $\mathcal{K}[y] = \sum_{k=0}^{n} b_k y^{(n-k)}$. (5) $\mathcal{K}[y] = 0$

__Idea:__ homogenní úloha; $y(x) = e^{\lambda x}$;

$$\mathcal{K}[e^{\lambda x}] = \sum_{k=0}^{n} b_k \underbrace{\left(\frac{d}{dx}\right)^{n-k} e^{\lambda x}}_{\lambda^{n-k} e^{\lambda x}} = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \lambda^{n-k} e^{\lambda x} = p(\lambda) e^{\lambda x};$$

kde $p(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} b_k \lambda^{n-k}$ je tzv. charakteristický polynom rovnice (5)...

$p(\lambda_0) = 0 \Rightarrow e^{\lambda_0 x}$ řeší $\mathcal{K}[y] = 0$. b_0 -- koeficient u λ^n.

__Poznámka.__ $p(\lambda)$ -- libovolný polynom stupně n;

$$p(\lambda) = a(\lambda - \lambda_1)^{m_1} (\lambda - \lambda_2)^{m_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{m_s};$$

$\lambda_j \in \mathbb{C}$, $j = 1, \ldots s$ .. kořeny polynomu

m_j -- násobnosti

Zřejmě: $n = m_1 + m_2 + \cdots + m_s$.

λ_0 -- kořen (nulový bod) násobnosti k

$\Leftrightarrow$ $p(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^k q(\lambda)$,

kde $q(\lambda)$ .. polynom, $q(\lambda_0) \neq 0$.

$\Leftrightarrow 0 = p(\lambda_0) = p'(\lambda_0) = \cdots = p^{(k-1)}(\lambda_0)$;

leč $p^{(k)}(\lambda_0) \neq 0$.

$\mathcal{K}[y] = f(x)$; $\quad \mathcal{K}[y] = \sum_{k=0}^{m} b_k y^{(m-k)}$; $\quad b_k \in \mathbb{C}$, $b_0 \neq 0$

charakteristický polynom: $\quad p(\lambda) = \sum_{k=0}^{m} b_k \lambda^{m-k}$;

Lemma 12.3. Je dán operátor $\mathcal{K}[y]$ a $p(\lambda)$ je jeho charakteristický polynom. Potom $\mathcal{K}[x^l e^{\lambda x}] = e^{\lambda x} q_l(x)$; pro $\forall l \geq 0$ celé

kde $q_l(x)$ je polynom proměnné x, a platí

$$q_l(x) = \sum_{j=0}^{l} \binom{l}{j} p^{(j)}(\lambda) x^{l-j}.$$

---

dk.: indukcí dle l.

$$l=0: \quad \mathcal{K}[e^{\lambda x}] = \sum_{k=0}^{m} b_k \underbrace{\left(\frac{d}{dx}\right)^{m-k} e^{\lambda x}}_{\lambda^{m-k} e^{\lambda x}} = e^{\lambda x} p(\lambda) = e^{\lambda x} q_0(x).$$

$$q_0(x) = \sum_{j=0}^{0} \binom{0}{0} p^{(0)}(\lambda) x^0 = p(\lambda).$$

trik: derivuji podle $\underline{\lambda}$; l-krát:

$$(LS): \quad \left(\frac{d}{d\lambda}\right)^l \mathcal{K}[e^{\lambda x}] = \left(\frac{d}{d\lambda}\right)^l \sum_{k=0}^{m} b_k \left(\frac{d}{dx}\right)^{m-k} [e^{\lambda x}]$$

$$= \sum_{k=0}^{m} b_k \left(\frac{\partial}{\partial \lambda}\right)^l \left(\frac{d}{dx}\right)^{m-k} [e^{\lambda x}]$$ záměna parc. derivací

$$= \sum_{k=0}^{m} b_k \left(\frac{d}{dx}\right)^{m-k} \Big[\underbrace{\left(\frac{d}{d\lambda}\right)^l e^{\lambda x}}_{x^l e^{\lambda x}}\Big]$$

$$= \mathcal{L}[x^l e^{\lambda x}].$$

(PS): $\left(\frac{d}{d\lambda}\right)^{\ell}\{e^{\lambda x}\chi(\lambda)\} = \sum_{j=0}^{\ell}\binom{\ell}{j}\chi^{(j)}(\lambda)\, x^{\ell-j} e^{\lambda x}$ <u>Leibniz</u>!!

$$= \sum_{j=0}^{\ell}\binom{\ell}{j}\underbrace{\left(\frac{d}{d\lambda}\right)^{j}\chi(\lambda)}_{\chi^{(j)}(\lambda)}\cdot\underbrace{\left(\frac{d}{d\lambda}\right)^{\ell-j}\{e^{\lambda x}\}}_{x^{\ell-j}e^{\lambda x}} \quad \checkmark.$$

Důsledek. Je-li λ_0 kořen $\chi(\lambda)$ násobnosti k,

sak fce $e^{\lambda_0 x}, x e^{\lambda_0 x}, \dots x^{k-1} e^{\lambda_0 x}$

řeší hom. úlohu $\mathcal{K}[y] = 0$.

$$\ell < k: \quad \mathcal{K}[x^{\ell} e^{\lambda_0 x}] = \sum_{j=0}^{\ell}\binom{\ell}{j}\underbrace{\chi^{(j)}(\lambda_0)}\, x^{\ell-j} = 0.$$

$= 0$; $j \leq \ell < k$

$\uparrow$

násob. kořene.

Leibniz. $\left(\frac{d}{dx}\right)^{m}\{f(x)g(x)\} = \sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}\left(\frac{d}{dx}\right)^{j} f(x)\cdot\left(\frac{d}{dx}\right)^{m-j} g(x)$;

Značení. $f(x) \equiv 0$ v I. $f(x) = 0$ pro $\forall x \in I$.

$f \equiv 0$

Lemma 12.4. Nechť $\lambda_1, \dots \lambda_m \in \mathbb{C}$ jsou vzájemně různá čísla; nechť $g_j(x)$, $j = 1, \dots m$, jsou polynomy. Jestliže $\sum_{j=1}^{m} g_j(x) e^{\lambda_j x} \equiv 0$ v I, pak nutně $g_j \equiv 0$.

Dk: indukcí dle m:

$m = 1$: $g_1(x) e^{\lambda_1 x} \equiv 0$ v I $\Big/ e^{-\lambda_1 x}$

$g_1(x) \equiv 0$.

$m \Rightarrow m+1$: sporem: neplatí pro $m+1$ $\Rightarrow$ neplatí pro m.

$\neg P(m+1)$: $\exists \lambda_1, \dots \lambda_{m+1} \in \mathbb{C}$

$g_1, \dots g_{m+1} \dots$ polynomy;

tž. $\sum_{j=1}^{m+1} g_j(x) e^{\lambda_j x} \equiv 0$; $\Big/ e^{-\lambda_{m+1} x}$

leč $g_j \not\equiv 0$; BÚNO $g_1 \not\equiv 0$.

$$\sum_{j=1}^{m} g_j(x) e^{(\lambda_j - \lambda_m) x} + g_{m+1}(x) \equiv 0 \; ; \quad (+)$$

Pozorování:

$$\left[g(x) e^{\mu x} \right]' = \left\{ \mu g(x) + g'(x) \right\} e^{\mu x}$$

$\mu \neq 0$

polynom stupně stejného jako $g(x)$

souhrnně:

(T) derivujeme $\frac{d}{dx}$ o 1 více krát, než je st $q_m + 1$, dostaneme:

$$\sum_{j=1}^{m} \tilde{q}_j(x) e^{(\lambda_j - \lambda)x} \equiv 0$$

$$\operatorname{st} \tilde{q}_j = \operatorname{st} q_j.$$

q_j nejsou id. nulové $\Rightarrow$ $\tilde{q}_j$ nejsou id. nulové;

výrok nyplatí pro $\underline{m}$.

<u>Věta 12.10.</u> [F.S. pro $\mathcal{K}[y]=0$]. Nechť λ_j, $j=1,\dots,s$ jsou různé kořeny $\chi(\lambda)$ operátoru $\mathcal{K}$, nechť n_j jsou jejich násobnosti. Potom funkce

$$(*) \quad x^{\ell} e^{\lambda_j x}; \quad j = 1, \dots, s; \quad \ell = 0, \dots n_j - 1$$

tvoří F.S. úlohy $\mathcal{K}[y] = 0$.

<u>Dk.:</u> $\mathcal{H} = \{ y \in C^n(\mathbb{R}); \mathcal{K}[y] = 0 \}$.

dané funkce náleží $\mathcal{H}$ (Lemma 12.3.)

je jich $n_1 + n_2 + \dots + n_s = n$

(součet násobností všech kořenů!)

? jsou LN: nechť $q(x)$ je nějaká lin. kombinace fcí (*)

$q(x)$ má tvar z L. 12.4.

tedy: $q(x) \equiv 0 \Rightarrow q_j(x) \equiv 0$;

neboli jde o triviální Lin. kom.

---

shrnu: (*) náleží do $\mathcal{H}$, jsou LN; počet $= n = \dim \mathcal{H}$

$\Rightarrow$ (*) tvoří bázi $\mathcal{H}$; neboli F.S.

– komplexní posudky:

koeficienty v $\mathbb{C}$: $y(x_0)=\eta_1$

$y^{(n-1)}(x_0)=\eta_n$; $\eta_j \in \mathbb{C}$;

hledejme $\in \mathbb{C}$; $x \in \mathbb{C}$.

<u>odkomplexnění</u>: $y(x): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$;

$b_k \in \mathbb{R}$. $p(\lambda)$ .. reálné koeficienty

$\lambda = \alpha + i\beta$; $\beta \neq 0$ je kořen násobnosti k

$\Rightarrow \bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ je též kořen násobnosti k

$$p(\bar{\lambda}) = \sum_{k=0}^{n} b_k (\bar{\lambda})^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \overline{b_k}\,\overline{\lambda^{n-k}} = \overline{\sum_{k=0}^{n} b_k \lambda^{n-k}} = \overline{p(\lambda)}.$$

$y(x): \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ řeší $L(y)=0$; $\Rightarrow$ $\mathrm{Re}\, y(x)$, $\mathrm{Im}\, y(x)$ řeší $L[y]=0$.

$$L[\mathrm{Im}\, y(x)] = \sum_{k=0}^{n} b_k \left(\frac{d}{dx}\right)^{n-k} [\mathrm{Im}\, y(x)] = \sum_{k=0}^{n} b_k\, \mathrm{Im}\left\{\left(\frac{d}{dx}\right)^{n-k} y(x)\right]$$

$$= \mathrm{Im} \sum_{k=0}^{n} b_k \left(\frac{d}{dx}\right)^{n-k} y(x) = \mathrm{Im}\, L[y(x)]$$

$\lambda, \bar{\lambda}$ .. kořeny nás. k ; $\boxed{e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, \dots x^{k-1} e^{\lambda x}}$ (1)

$e^{\bar{\lambda} x}; xe^{\bar{\lambda} x}, \dots x^{k-1} e^{\bar{\lambda} x}$ (2)

$$e^{\lambda x} = e^{\alpha x + i\beta x} = e^{\alpha x}[\cos\beta x + i \sin\beta x]$$

Re (1): $e^{\alpha x}\cos\beta x$, $xe^{\alpha x}\cos\beta x, \dots$ $x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x$ (3)

Im (1): $e^{\alpha x}\sin\beta x$, $xe^{\alpha x}\sin\beta x, \dots$ $x^{k-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$ (4)

Příklad. $y^{(5)} - y^{(4)} - 5y^{(3)} + y'' + 8y' + 4y = 0$

$$\lambda(\lambda) = \lambda^5 - \lambda^4 - 5\lambda^3 + \lambda^2 + 8\lambda + 4$$
$$= (\lambda+1)^3(\lambda-2)^2; \quad \lambda_1 = -1 \ (3 \text{ nás.})$$

F.S. $e^{-\lambda x}, \ xe^{-\lambda x}, \ x^2 e^{-\lambda x}$

$\lambda = 2$: 2 násob.

$e^{2x}, \ xe^{2x}$.

$$y_0(x) = C_1 e^{-\lambda x} + C_2 x e^{-\lambda x} + C_3 x^2 e^{-\lambda x} + C_4 e^{2x} + C_5 x e^{2x}; \ x \in \mathbb{R}.$$

Poznámka. problém: λ .. komplexní kořen...
pokud $b_k \in \mathbb{C}$ .. nedá se nic dělat.

Příklad. $y'' + y = \frac{1}{\cos x}$; $x \in \left(\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{3\pi}{2} + k\pi\right); \ k \in \mathbb{Z}$.

$\lambda(\lambda) = \lambda^2 + 1$; $\pm i$ (jednonásobné!). F.S. $\{\underbrace{e^{ix}}_{Re,\, Im}, e^{-ix}\}$

$e^{\pm ix} = \cos x \pm i \sin x$ F.S. $\{\cos x, \sin x\}$

(VK) $y(x) = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x;$

$$C_1' \cos x + C_2' \sin x = 0$$
$$C_1'(-\sin x) + C_2' \cos x = \frac{1}{\cos x}$$

$$\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}$$

$C_1' = \frac{-\sin x}{\cos x}$; $C_1(x) = \ln|\cos x|$;

$C_2' = 1$; $C_2(x) = x$; $y_P(x) = \cos x \ln|\cos x| + x \sin x$;

$$y_O(x) = \cos x \left(K_1 + \ln|\cos x|\right) + \sin x \left(x + K_2\right); \ x \in I_k.$$

Opak.: $\sum_{k=0}^{m} b_k y^{(m-k)} = f(x)$; $\lambda(\lambda) = \sum_{k=0}^{m} b_k \lambda^{m-k}$ .. char. polynom...

$\lambda \in R$ k-násobý: $e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, \dots x^{k-1} e^{\lambda x}$ $b_k \in R$

(FS)

$\lambda = \alpha \pm i\beta$ k-nás.: $e^{\alpha x} \cos\beta x, \; x e^{\alpha x} \cos\beta x; \; x^{k-1} e^{\alpha x} \cos\beta x$

sin sin sin

Příklad. (VK) $y_p(x) = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x)$;

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}.$$

Definice. $K[y] = \underbrace{e^{\lambda_0 x} q(x)}$; (6) $q(x)$ .. polynom

„speciální pravá strana" (typ funkce (FS))

$\longrightarrow$ řešení lze „uhodnout"... viz dále...

Pozorování. Nechť $q_j(x)$; $j = 0, \dots m$ jsou polynomy; st $q_j = j$.

Potom: je-li $q(x)$ libovolný polynom stupně m, existují

konstanty c_j tak, že $q(x) = \sum_{j=0}^{m} c_j q_j(x)$.

$$q(x) = \cancel{a_0 x^m} + \cancel{a_1 x^{m-1}} + \dots + a_m;$$

$$q_m(x) = \underline{b_0} x^m + \dots \qquad b_0 \neq 0 ..$$

můžeme C_m tak, že st $(q - C_m q_m) \le m-1$

$$(C_m = a_0 / b_0)$$

$$q_{m-1}(x) = \tilde{b}_0 x^{m-1} + \dots$$

můžeme C_{m-1} tak, že st $\left(q - [C_m q_m + C_{m-1} q_{m-1}]\right) \le m-2$

⋮

můžeme C_0 tak, že $q - \sum c_j q_j = 0$.

Věta 12.11. Je dána úloha (6), kde $q(x)$ je polynom stupně $\leq m$. Nechť $k \geq 0$ vyjadřuje násobnost λ_0 coby kořene $\chi(\lambda)$ (tj. $k=0$ pokud λ_0 není kořen). Pak existuje $r(x)$ polynom stupně $\leq m$ takový, že $y(x) = x^k r(x) e^{\lambda_0 x}$ řeší (6).

Dk.: pro $s = 0, \dots m$

$$\mathcal{K}\left[x^{k+s} e^{\lambda_0 x}\right] \underset{\substack{\uparrow \\ L.\,12.3.}}{=} e^{\lambda_0 x} \underbrace{\sum_{j=0}^{k+s} \binom{k+s}{j} \chi^{(j)}(\lambda_0)\, x^{k+s-j}}_{q_s(x)}$$

sudělení: $q_s(x)$ polynom st $= s$

$\chi^{(j)}(\lambda_0) = 0$ pro $j < k$: $\quad q_s(x) = \sum_{j=k}^{k+s} \binom{k+s}{j} \chi^{(j)}(\lambda_0)\, x^{k+s-j}$

λ_0.. k más. kořen

vedoucí člen: $(j = k)$

$$\underbrace{\binom{k+s}{k} \chi^{(k)}(\lambda_0)}_{\neq 0} x^s$$

předchozí pozorování: $\exists\, c_0, \dots c_m$ ..

$$(*) \quad q(x) = \sum_{s=0}^{m} c_s\, q_s(x);$$

polož $\quad y(x) = e^{\lambda_0 x} x^k \cdot r(x); \quad r(x) = \sum_{s=0}^{m} c_s x^s.$

$$\mathcal{K}[y] = \mathcal{K}\left[e^{\lambda_0 x} x^k \sum_{s=0}^{m} c_s x^s\right]$$

linearita

$$= \mathcal{K}\left[\sum_{s=0}^{m} c_s e^{\lambda_0 x} x^{k+s}\right] = \sum_{s=0}^{m} c_s \mathcal{K}\left[e^{\lambda_0 x} x^{k+s}\right]$$

$$= \sum_{s=0}^{m} c_s \cdot e^{\lambda_0 x} q_s(x) \underset{(*)}{=} e^{\lambda_0 x} q(x).$$

Příklad. $y'' - y' - 2y = e^{2x}(x+1)$

$\vdots$

$$y_p(x) = \left(\frac{3}{14}x^2 + \frac{2}{7}x\right)e^{2x};$$

$$y_0(x) = y_p(x) + K_1 e^{2x} + K_2 e^{-x}; \quad K_{1,2} \in \mathbb{R}.$$

Poznámka: $b_k \in \mathbb{R}$ … „odkomplexnění":

místo $f(x), \bar{f}(x)$ … $\operatorname{Re} f(x), \operatorname{Im} f(x)$

speciální pravá strana: $q_1(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$,

kombinace: $q_2(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$

$\operatorname{Re}, \operatorname{Im}$ od $q(x)e^{\lambda x}$; $\lambda = \alpha + i\beta$.

$q(x)e^{\bar{\lambda}x}$;

V. řešení: tvaru $x^k[p_1(x)e^{\lambda x}\ p_2(x)e^{\bar{\lambda}x}]$

$\vdots$

$\operatorname{Re}; \operatorname{Im}$: $x^k[p_1(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$

$+ p_2(x)e^{\alpha x}\sin\beta x]$;

Věta 12.11: Je dána úloha $\mathcal{L}[y] = e^{\alpha x}[q_1(x)\cos\beta x + q_2(x)\sin\beta x]$; (7)

kde $q_1(x), q_2(x)$ jsou polynomy stupně $\le m$. Nechť $b_k \in \mathbb{R}$, nechť $k \ge 0$ vyjadřuje násobnost $\lambda = \alpha + i\beta$ coby kořene $\chi(\lambda)$. Potom existují polynomy $r_1(x), r_2(x)$ $\underbrace{\ }_{\text{stupně} \le m}$ tak, že $y_p(x) = x^k e^{\alpha x}[r_1(x)\cos\beta x + r_2(x)\sin\beta x]$ je řešení (7). (bd)

$x' = 2x \mp y$ $\qquad A = \Big(1 \quad -2$

$y' = x + y$

$y = 2x - x'$ $\qquad \overset{-6x}{\underline{2x'} - \underline{x''} = \cancel{2}x + 2x - x'}$

$y' = 2x' - x''$ $\qquad 0 = x'' - 3x' + 3x$

$\cancel{x^2}\ (\lambda - 4)(\lambda + 1) = \lambda^2 - 3\lambda - 4$

~~x~~ 2. rce: $y' = -6x + y$

$\underline{2x'} - x'' = -6x + 2x - x'$

$0 = x'' - 3x' - 4x$

$\lambda^2 - 3\lambda + 4 = (\lambda - 4)(\lambda + 1)$

$x(t) = K e^{4t} + L e^{-t}$

$y = 2x - x' = 2K e^{4t} + L e^{-t} - (4K e^{4t} - L e^{-t})$

$= -2K e^{4t} + 2L e^{-t};$

---

obecně $X' = AX$; $\quad X = X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$; $\qquad ' \ldots \frac{d}{dt}$

$A = \{a_{ij}\}_{ij=1}^{n}$

1. rce: $x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots$

$\Rightarrow\ x_2 = L(x_1, x_1', x_3, \ldots x_n)$

$x_2' = L(x_1', x_1'', x_3', \ldots x_n')$

dosadím do zbylých rovnic: $(n-1)$ rovnic ~~pro~~ $x_1, x_3, \ldots x_n,$ $\underline{x_1', x_1''}$.

$\lambda(\lambda-1) + -\cancel{a}\lambda + 3b = 0$ $\quad (\lambda+1)(\lambda-3) = \lambda^2 - 2\lambda - 3$

$\lambda^2 - \lambda$

$$\boxed{x^2 y'' - xy - 3y = 0}$$

$\lambda(\lambda-1) - \lambda - 3 = 0$

$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda+1)(\lambda-3)$

F.S. $\{x^{-1}, x^3\}$.

<u>Definice</u>. Rovnice $\mathcal{E}[y] = f(x)$, kde

$$\mathcal{E}[y] = \sum_{k=0}^{n} b_k x^{n-k} y^{(n-k)}$$ se nazývá Eulerova rovnice.

$$b_k \in \mathbb{R};\ b_0 \neq 0.$$

Speciální případ $\check{a}_k(x) = b_k x^{n-k}$; $x \in (-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$.

<u>Postup řešení</u>: hledám řešení tvaru $y(\lambda) = |x|^{\lambda}$;

$$y' = \lambda |x|^{\lambda-1} \cdot |x|'$$
$$= \lambda \cdot |x|^{\lambda-1} \operatorname{sgn} x$$

$$y^{(k)} = \lambda \cdot (\lambda-1) \cdots (\lambda-k+1) |x|^{\lambda-k} \operatorname{sgn}^k x$$

$$\mathcal{E}[y] = \sum_{k=0}^{n} b_k x^{n-k} \cdot \lambda \cdot (\lambda-1) \cdots (\lambda-n+k+1) |x|^{\lambda-(n-k)} \cdot \operatorname{sgn}^{n-k} x$$

$$(x \cdot \operatorname{sgn} x)^{n-k} = |x|^{n-k}$$

$$= |x|^{\lambda} \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{n} b_k \cdot \lambda(\lambda-1) \cdots (\lambda-n+k+1)}_{\chi(\lambda)}$$

$$\mathcal{E}\left[|x|^{\lambda}\right] = |x|^{\lambda} \cdot \chi(\lambda)$$

λ_0 ... kořen $\chi(\lambda)$ ... $\Rightarrow$ $|x|^{\lambda_0}$ řeší $\mathcal{E}[y] = 0$.

$$\left(\frac{d}{d\lambda}\right)^{k} \mathcal{E}\left[\ln^{\ell}|x| \cdot |x|^{\lambda}\right] =$$

$$\mathcal{E}[y] = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{x^{(n-k)} b_k}\cdot y^{(n-k)}(x) = f(x);$$

rovnice; $b_0 \neq 0$ v intervalech $(-\infty, 0)$ a $(0, +\infty)$.

$$y(x) = |x|^{\lambda}; \qquad y'(x) = \lambda |x|^{\lambda-1} \operatorname{sgn}(x)$$

$$y^{(k)}(x) = \lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-k+1)|x|^{\lambda-k} \operatorname{sgn}^k(x);$$

$$\mathcal{B}[|x|^{\lambda}] = \sum_{k=0}^{n} b_k |x|^{\lambda} \lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-k+1); \quad = |x|^{\lambda} \chi(\lambda)$$

$$\chi(\lambda) = b_0 \lambda(\lambda-1)\cdots\cdots(\lambda-k+1)\cdots$$

$\underline{b_0 \lambda^n}$ polynom stupně $\underline{n}$.

λ_0 .. kořen rce $\chi(\lambda)$ .. $|x|^{\lambda_0}$ .. řeší homog. $\mathcal{B}[y] = 0$.

$$\mathcal{B}[|x|^{\lambda}] = |x|^{\lambda} \chi(\lambda) \quad ; \ \frac{d}{d\lambda}$$

(LS): $\frac{d}{d\lambda} \mathcal{B}[|x|^{\lambda}] = \mathcal{B}\left[\frac{d}{d\lambda}|x|^{\lambda}\right] = \mathcal{B}\left[\ln|x| \cdot |x|^{\lambda}\right]$

(PS) $\frac{d}{d\lambda}\{|x|^{\lambda}\chi(\lambda)\} = \ln|x| \, |x|^{\lambda} \chi(\lambda) + |x|^{\lambda} \chi'(\lambda)$

$$= |x|^{\lambda}\{\ln|x| \chi(\lambda) + \chi'(\lambda)\}.$$

λ_0 2-násobný: $\Rightarrow \mathcal{B}[\ln|x| \, |x|^{\lambda}] = 0$.

obecně: λ_0 .. k-násobný kořen $\chi(\lambda)$

$$\Rightarrow |x|^{\lambda}; \ |x|^{\lambda} \ln|x|; \ \ldots \ |x|^{\lambda} \ln^{k-1}|x|$$

řeší $\mathcal{B}[y] = 0$.

Příklad. $y'' + y' - y = \cos x$

$$PS = e^{0\cdot x}\left[g_1(x)\cos x + g_2(x)\sin \beta x\right]; \quad \alpha = 0, \ \beta = 1.$$

st $g_{1,2} \leq 0$. $\quad \lambda = i$.

$$\exists\ y_p(x) = e^{0\cdot x}\left[r_1(x)\cos x + g_2(x)\sin x\right]$$ není kořen $\chi(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 1$

st $r_{1,2} \leq 0$..

$= A\cos x + B\sin x \quad ; A, B$ - konstanty...

.. $A = -\frac{2}{5}$; $B = \frac{1}{5}$.

Poznámka Věta 12.5 .. 1.rce řádu n $\longrightarrow$ systém n rovnic řádu 1.

~ opačný postup:

$\mathcal{U}$

$$y'' + y' - y = \cos x \;; \quad = \quad e^{0\cdot x}\left[g_1(x)\cos x + g_2(x)\sin x\right]$$

$\alpha = 0 \,;\; \beta = 1 \,;$

$g_2(x) = 1$ ... a $g_2 = 0$.

$\lambda = i$ ... $\chi(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 1 \;;$

i není kořen;

řešení ve tvaru

$$e^{0\cdot x}\left[A\cos x + B\sin x\right]$$

$$y_p(x) = e^{0x}\cdot\left[r_1(x)\cos x + r_2(x)\sin x\right]$$

$$y_p = \cancel{A\cos x} + B\sin x \;;$$
$$y_p' = \cancel{-A\sin x} + \cancel{B\cos x}$$
$$y_p'' = -\cancel{A\cos x} - \cancel{B\sin x}$$

$$\mathcal{K}[y] = \cos x\left[-A + B - A\right]$$
$$+ \sin x\left[-B - A - B\right] = \cos x$$

$$-2A + B = 1$$
$$-2B - A = 0 \;;\; A = 2B$$
$$-2A = 4B$$
$$5B = 1 \,;\; B = \frac{2}{5} \,;\; A = -\frac{2}{5} \,;$$

$$y_p = \frac{1}{5}\cos x + \frac{2}{5}\sin x \,;$$

F.S. $D = 1 + 4 = 5$, $\lambda_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

$$y_0(x) = K_1 \exp\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}x\right) + K_2 \exp\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}x\right) + \cdots$$