11. Mocninné řady

proměnná $\in \mathbb{C}$

Definice. Mocninná řada je symbol $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$

koeficienty $\in \mathbb{C}$; střed

úmluva: $a^0 = 1 \ \forall a \in \mathbb{C}$

$a_k, z, z_0 \in \mathbb{C}$.

$$a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \dots$$

Poznámky:
- mocninná řada: zobecněný polynom
- mnoho funkcí můžeme psát jako součet mocninné řady.

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k; \quad z \in \mathbb{C}$$

$$\ln(1+z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{k+1}}{k+1}, \quad |z| < 1$$

Věta 11.1. [Poloměr konvergence.] Je dána mocn. řada (1) $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$.
Pak existuje číslo $R \in [0, +\infty]$ takové, že
(i) pokud $|z-z_0| < R$, tak (1) konverguje absolutně
(ii) pokud $|z-z_0| > R$, tak (1) diverguje.

Dk: $\mathcal{K} = \{ \rho \geq 0;$ posloupnost $\{|a_k|\rho^k\}_{k=0}^{\infty}$ je omezená $\}$.

$\mathcal{K} \neq \emptyset$; neb $0 \in \mathcal{K}$.

položme $R = \sup \mathcal{K}$ ... hledané R

(i) $|z-z_0| < R$ .. z vlastnosti suprema: $\exists \rho \in \mathcal{K};\ \rho > |z-z_0|$.

$$|a_k(z-z_0)^k| = \underbrace{|a_k \rho^k|}_{\substack{\text{omezené} \\ \rho \in \mathcal{K}}} \cdot \left| \frac{(z-z_0)}{\rho} \right|^k \leq C \cdot q^k;$$

$$q = \left| \frac{z-z_0}{\rho} \right| < 1$$

$\sum q^k$ konv. $\Rightarrow$ (1) konv. absolutně.

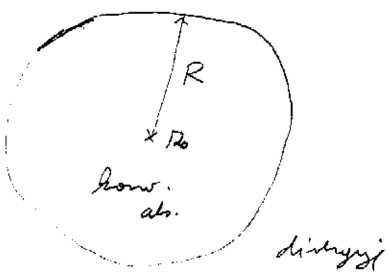
(ii) nechť $|z-z_0| > R$: tedy $|z-z_0| \notin K$.

$$|a_k (z-z_0)^k| = |a_k||z-z_0|^k \ldots \text{ není omezená};$$

$$\text{tedy: } a_k (z-z_0)^k \not\to 0.$$

(2) diverguje V. 10.1.

<u>Terminologie:</u> Číslo R ~~z předchozí věty~~ se nazývá poloměr konvergence řady (1). Množiny $\{z \in \mathbb{C};\ |z| < R\}$ resp. $\{z \in \mathbb{C};\ |z| = R\}$ se nazývají kruh resp. kružnice konvergence.



<u>Věta 11.2.</u> [Výpočet R.] Je dána (1) $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$.

(i) Je-li $\dfrac{|a_k|}{|a_{k+1}|} \to R$, je R poloměr konvergence (1).

(ii) Je-li $\dfrac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}} \to R$, je R poloměr konvergence (1).

<u>Dk:</u> (i) vyšetříme abs. konv. pomocí podílového kritéria:

$$b_k = |a_k (z-z_0)^k|; \qquad \frac{b_{k+1}}{b_k} = \frac{|a_{k+1}||z-z_0|^{k+1}}{|a_k| \cdot |z-z_0|^k} = \frac{|z-z_0|}{\frac{|a_k|}{|a_{k+1}|}} \to$$

$a_k \neq 0 \ \forall k$.

Nechť (1) $\rho = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{|a_{k+1}|}{|a_k|}$

nebo (2) $\rho = \lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$.

Potom $R = \dfrac{1}{\rho}$ (s úmluvou $\dfrac{1}{\infty} = 0$, $\dfrac{1}{0} = \infty$) je poloměr konvergence dané řady.

(1) $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-z_0)^k$ $\quad \exists!\, R \in [0,+\infty]$

poloměr konvergence

$|z-z_0| < R \Rightarrow$ konv. abs.

$|z-z_0| > R \Rightarrow$ diverguje

<u>Věta 11.3.</u> Je dána řada (1). Nechť $\sqrt[k]{|c_k|} \to r$, $k \to \infty$. Potom $R = \frac{1}{r}$ (úmluva $\frac{1}{\infty} = 0$, $\frac{1}{0} = \infty$) je poloměr konvergence (1).

<u>Dk.:</u> $a_k = c_k (z-z_0)^k$; odmocninové kritérium: $(z \neq z_0)$

$$\sqrt[k]{|c_k (z-z_0)^k|} = \sqrt[k]{|c_k|} \cdot |z-z_0| \to r \cdot |z-z_0|$$

(i) $r = 0$: (1) konv. abs. pro $\forall z \in \mathbb{C}$ .. $R = \infty = \frac{1}{r}$

(ii) $r = \infty$: (1) div pro $\forall z \neq z_0$ .. $R = 0 = \frac{1}{r}$

(iii) $r \in (0,+\infty)$: (1) konv pro $r \cdot |z-z_0| < 1$

$|z-z_0| < \frac{1}{r}$

div pro $|z-z_0| > \frac{1}{r}$,

tedy $R = \frac{1}{r}$.

<u>Příklad:</u> $\sum_{k=0}^{\infty} \left(1+\frac{1}{k}\right)^{k^2} z^k$;

$$\sqrt[k]{|c_k|} = \left(1+\frac{1}{k}\right)^k \to e.$$

$R = \frac{1}{e}$.

---

cíl: $\left[\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-z_0)^k\right]' = \sum_{k=0}^{\infty} \left(c_k (z-z_0)^k\right)' = \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty}} k c_k (z-z_0)^{k-1}$

$\boxed{\text{záměna } \sum \text{ a } '}$ „derivace člen po členu"

netriviální!

$$\sum_{l=0}^{\infty} \underbrace{(l+1) c_{l+1}}_{\tilde{c}_l} (z-z_0)^l$$

$\sum_{k=0}^{\infty} \tilde{c}_k (z-z_0)^k$; $\quad \tilde{c}_0 = c_1$

$\tilde{c}_1 = 2 c_2$

$\tilde{c}_l = (l+1) c_{l+1}$

Lemma 11.1 Řady (1) $\sum\limits_{k=0} c_k (z-z_0)^k$ a (2) $\sum\limits_{k=1} k c_k (z-z_0)^{k-1}$

mají stejný poloměr konvergence.

Dk. R_1, R_2 poloměr konv. (1), (2).

$R_1 = \sup K_1$; $K_1 = \{\rho \geq 0;\ \{|c_k|\rho^k\}$ je omezené$\}$

$R_2 = \sup K_2$; $K_2 = \{\rho \geq 0;\ k|c_k|\rho^{k-1}$ je omezené$\}$.

$$\underbrace{|c_k|\cdot\rho^k} \leq \underbrace{k|c_k|\cdot\rho^{k-1}}\cdot\rho \,..$$

tedy: $K_2 \subset K_1 \Rightarrow \underline{R_1 \geq R_2}$.

Ukážu: $R_1 = R_2$; sporem: ?? $R_1 > R_2$.

vol ρ; $R_2 < \underbrace{\rho < R_1}$: $\quad k|c_k|\rho^{k-1}$ .. neomezené;

$\exists\ \eta > \rho$: $\quad |c_k|\eta^k$ .. omezené!

$$k|c_k|\rho^{k-1} = \underbrace{|c_k|\eta^k}_{\text{omezené}}\cdot\underbrace{k\left(\frac{\rho}{\eta}\right)^k}_{\to 0}\cdot\frac{1}{\rho} \to 0 \quad \underline{\text{spor}}$$

neomezené!

$$= k\cdot\underbrace{\exp\{k\gamma\}}_{\to 0};\quad \gamma = \ln\frac{\rho}{\eta} < 0$$

rychleji než k

Důsledky: Řady (3) $\sum\limits_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k(z-z_0)^{k-2}$

(4) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k+1}(z-z_0)^{k+1}$

mají stejný poloměr konvergence jako (1).

(3) .. vzniklo derivací (1)

(1) .. vzniklo derivací (4)

Heslo: formálním derivováním/integrováním se nemění R.

binomická věta $(a+b)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^{n-j} b^j = a^n + n a^{n-1} b + \cdots$

Věta 11.4 Nechť $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-z_0)^k$ má kladný poloměr konvergence R.

Označ $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-z_0)^k$; $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k (z-z_0)^{k-1}$.

Potom $F'(z) = f(z)$ pro každé z takové, že $|z-z_0| < R$.

Dk.: BÚNO: $z_0 = 0$; označ $\varphi(h) = \dfrac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z)$

z - pevné. cíl: $\varphi(h) \to 0$ pro $h \to 0$.

$$\boxed{\cancel{F(z+h) = c_0 + c_1(z+h)}} + \sum_{k=2}^{\infty} c_k (z+h)^k$$

$$\boxed{\cancel{F(z) = c_0 + c_1 z}} + \sum_{k=2}^{\infty} c_k z^k$$

$$\boxed{\cancel{f(z) = c_1}} + \sum_{k=2}^{\infty} k c_k z^{k-1}$$

$$\psi(r) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-2)|c_k| r^{k-2}$$

$\uparrow$ konv. pro $\forall r < R$.

$$\varphi(z) = \sum_{k=2}^{\infty} c_k \left\{ \frac{1}{h} \left((z+h)^k - \cancel{z^k} \right) - \cancel{k z^{k-1}} \right\}$$

$$(z+h)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} z^{k-j} h^j = \cancel{z^k} + \cancel{k z^{k-1} h} + \sum_{j=2}^{k} \binom{k}{j} z^{k-j} h^j$$

$$\varphi(z) = h \sum_{k=2}^{\infty} c_k \left\{ \sum_{j=2}^{k} \binom{k}{j} z^{k-j} h^{j-2} \right\} \qquad \begin{aligned} j-2 &= l \\ j &= 2+l \end{aligned}$$

$$= h \sum_{k=2}^{\infty} c_k \left\{ \sum_{l=0}^{k-2} \binom{k}{l+2} z^{(k-2)-l} h^l \right\}$$

$\{\ \}$ - „skoro" $(z+h)^{k-2}$

chceme $\binom{k-2}{l}$

$$\binom{k}{l+2} = \frac{k!}{(l+2)!\,(k-l-2)!} \leq \frac{k!}{l!\,(k-l-2)!} = k(k-1) \cdot \frac{(k-2)!}{l!\,((k-2)-l)!} =$$

$$|\varphi(z)| \le |h| \sum_{k=2}^{\infty} |c_k|\, k(k-1) \underbrace{\sum_{l=0}^{k-2} \binom{k-2}{l} |z|^{k-2-l} |h|^{l}}_{(|z|+|h|)^{k-2}} = |h|\,\psi(|z|+|h|).$$

(3) $\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)\, c_k\, z^{k-2}$ .. poloměr konvergence $R>0$.

z pevné; $|z|<R$.

zvol $\delta>0$ tak, že $\rho = |z|+\delta < R$.

(3) konv. abs. $z=\rho$ $\Rightarrow$ $A=\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)|c_k|\rho^{k-2} < \infty$.

$$|\varphi(z)| \le |h| \sum_{k=2}^{\infty} |c_k|\, k(k-1) \Big(\underbrace{|z|+|h|}_{\le |z|+\delta=\rho}\Big)^{k} < A|h| \to$$ pro $h\to 0$.

pro $\forall h$, $|h|<\delta$.

Poznámka: $F'(z)=f(z)$ .. derivace podle komplexní proměnné:

$$(\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)\left[\,0<|h|<\delta;\ h\in\mathbb{C} \Rightarrow \left|\frac{F(z+h)-F(z)}{h}-f(z)\right|<\varepsilon\right].$$

$F'(x)=f(x)$ pro $\forall x\in(-R,R)$ speciální případ.

Důsledky: (1) $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-z_0)^k$ má pol. konvergence $R>0$. Potom její součet $F(z)$ je funkce nekonečně diferencovatelná v $\{z\in\mathbb{C};\ |z-z_0|<R\}=K$

a další
$$F''(z)=\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)\, c_k\, (z-z_0)^{k-2}$$
$$F'''(z)=\sum_{k=3}^{\infty} k(k-1)(k-2)\, c_k\, (z-z_0)^{k-3}$$

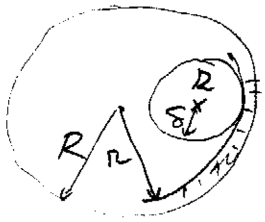
Funkce $\Phi(z)=\sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k+1}(z-z_0)^{k+1}$ je primitivní k $F(z)$ v K;

tj. $\Phi'(z)=F(z)$ pro $\forall z\in K$.

Spojitost: $F(z+h)=F(z)+\frac{F(z+h)-F(z)}{h}\cdot h$; $h\to 0$.

. důkaz V.11.4: $F(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$

$$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^{k-1}$$



víme: $\sum\limits_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k z^{k-2}$ ... konv. abs. $|z|<R$

tzn: $\sum\limits_{k=2}^{\infty} k(k-1)|a_k|\, r^{k-2}<\infty$

$z\in\mathbb{C}$; $|z|<R$;

$\delta>0$ ... $|z|+\delta=r<R$.

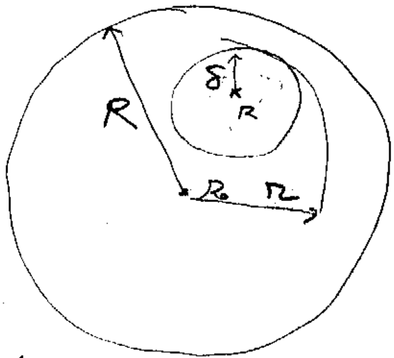
BÚNO: $z_0=0$; označ: $\varphi(h)=\frac{1}{h}\left[F(z+h)-F(z)\right]-f(z)$

cíl: $\varphi(h)\to 0$; $h\to 0$.

Zvol: $z\in\mathbb{C}$; $|z|<R$ pevné.

$\delta>0$ .. $|z|+\delta=r<R$;

~~0<~~ $h\in\mathbb{C}$ .. $0<|h|<\delta$.



$$F(z+h)=\cancel{a_0}+a_1(\cancel{z}+h)+\sum_{k=2}^{\infty}a_k(z+h)^k$$

$$F(z)=\cancel{a_0}+\cancel{a_1 z}+\sum_{k=2}^{\infty}a_k(z)^k$$

$-$ $\quad : h$

$$f(z)=\qquad\cancel{a_1}\qquad+\sum_{k=2}^{\infty}k a_k z^{k-1}$$

$$\varphi(h)=\sum_{k=2}^{\infty}a_k\left\{\frac{1}{h}\left((z+h)^k-\cancel{z^k}\right)-\cancel{k z^{k-1}}\right\}$$

$$(z+h)^k=\cancel{z^k}+\cancel{k z^{k-1}h}+\sum_{j=2}^{k}\binom{k}{j}z^{k-j}\frac{h^j}{h}\qquad j\geq 2$$

$k\geq 2$ binomické věty ...

Holomorfia

$$\varphi(h) = h \cdot \sum_{k=2}^{\infty} a_k \left\{ \sum_{j=2}^{k} \binom{k}{j} r^{k-j} h^{j-2} \right\} \qquad \boxed{\begin{matrix} j = l+2 \\ l = j-2 \end{matrix}}$$

$$= h \sum_{k=2}^{\infty} a_k \left\{ \sum_{l=0}^{k-2} \binom{k}{l+2} r^{(k-2)-l} h^{l} \right\}$$

$\uparrow$ tolmér $(r+h)^{k-2}$!!

$$\binom{k}{l+2} = \frac{k!}{(l+2)!\,(k-l-2)!} \le \frac{k!}{l!\,(k-l-2)!} = k(k-1)\frac{(k-2)!}{l!\,(k-2-l)!}$$

$l! \le (l+2)!$

$$= k(k-1)\binom{k-2}{l}$$

$$\le h \sum_{k=2}^{\infty} a_k \left\{ k(k-1) \underbrace{\sum_{l=0}^{k-2} \binom{k-2}{l} r^{(k-2)-l} h^{l}}_{(r+h)^{k-2}} \right\}.$$

$$|\varphi(h)| \le |h| \sum_{k=2} k(k-1)\, a_k\, (r+h$$

[illegible]: $|\varphi(h)| \le |h| \cdot \sum_{k=2}^{\infty} |a_k| \left\{ \sum_{j=2}^{k} \binom{k}{j} r^{k-j} h^{j-2} \right\}$

$$\le |h| \cdot \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)|a_k| \underbrace{\sum_{l=0}^{k-2} \binom{k-2}{l} |r|^{(k-2)-l} |h|^{l}}_{(|r|+|h|)^{k-2}}$$

$$\le |h| \cdot \underbrace{\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)|a_k|\, r^{k-2}}_{\le A < \infty.} \le |h| \cdot A;$$

Így: $|\varphi(h)| \le |h| \cdot A; \quad \forall\, 0 < |h| < \delta.$

[illegible]:

$$\{c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \dots\}' = c_1 + 2c_2(z-z_0) + 3c_3(z-z_0)^2 + \dots$$

$\forall z \in U = \{z \in \mathbb{C};\ |z-z_0| < R\}$; poloměr konvergence...

$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-z_0)^k$ je v U nekonečně diferencovatelná, má zde primitivní funkci

<u>Věta 11.5.</u> Nechť $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-z_0)^k$ má kladný poloměr konvergence. Označme $F(z)$ její součet. Potom pro $\forall k = 0, 1, \dots$ platí

$$F^{(l)}(z_0) = l!\, c_l \quad ; l = 0, 1, \dots$$

$F(z) = c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \dots \quad \Big| \ z = z_0$

$F(z_0) = c_0$

$F'(z) = c_1 + 2c_2(z-z_0) + 3c_3(z-z_0)^2$

$$F^{(l)}(z) = \sum_{k=l}^{\infty} k\cdot(k-1)\cdot(k-2)\dots(k-l+1)\, c_k (z-z_0)^{k-l}$$

$F^{(l)}(z_0) = k(k-1)(k-2)\dots 1 \cdot c_l = k!\, c_l$

<u>Důsledek.</u> Nechť (1) $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-z_0)^k$, (2) $\sum_{k=0}^{\infty} \tilde{c}_k (z-z_0)^k$ mají kladný poloměr konvergence. Označme $F(z), \tilde{F}(z)$ jejich součty. Jestliže $F(z) = \tilde{F}(z)$ na jistém $U(z_0)$, je $c_l = \tilde{c}_l$ pro $\forall l = 0, 1, 2.$

<u>Dk.:</u> $F(z) = \tilde{F}(z) \quad \exists \delta > 0;\ F(z) = \tilde{F}(z)$ pro $\forall z \in U(z_0, \delta)$

$$\Rightarrow F^{(l)}(z) = \tilde{F}^{(l)}(z) \text{ pro } \forall l = 0, 1, 2.$$

$$\begin{array}{cc} \| & \| \\ l!\, c_l & l!\, \tilde{c}_l \end{array}$$

$$\Rightarrow c_l = \tilde{c}_l \text{ pro } \forall l = 0, 1,$$

Pozn.: $p(x), \tilde{p}(x)$ polynomy; $p(x) = \tilde{p}(x)$ pro $\forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow p, \tilde{p}$ jsou totožné (mají stejné koeficienty...)

Věta E. Existuje funkce $\exp x : \mathbb{R} \to (0, \infty)$, ~~která~~ splňující

1. $\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$ pro $\forall x, y \in \mathbb{R}$
2. $\exp(x)$ je spojitá, rostoucí v $\mathbb{R}$
3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\exp(x) - 1}{x} = 1.$

Funkce $\exp(x)$ je těmito vlastnostmi určena jednoznačně.

Dk.: existence: polož $E(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{x^k}{k!}$ .. má smysl pro $\forall x \in \mathbb{C}$

ad 1: platí dokonce pro $x, y \in \mathbb{C}$

navíc: $E'(x) = E(x) \Rightarrow E(x)$ je spojitá (má vlastní derivaci)

$x \geq 0$: $E(x) \geq 1$

$x < 0$: $E(+x) \cdot \underbrace{E(-x)}_{>0} = E(0) = 1$

$\Downarrow$

je také kladné.

tedy $E'(x) = E(x) > 0 \Rightarrow E(x)$ rostoucí v $\mathbb{R}$

ad 3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{E(x) - 1}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{E(x) - E(0)}{x - 0} = E'(0) = E(0) = 1$

jednoznačnost: z (1-3) lze odvodit, že $[\exp(x)]' = \exp(x)$.

tedy $\boxed{\begin{array}{l} y' = y \\ y(0) = 1 \end{array}}$ $\exp(0) = 1$ tato diferenciální rovnice má jediné řešení!

zgl. 6: [illegible], ker $\exp'(x) = \exp(x)$;

$$T_{0,n}^{\exp x}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + R_{n+1}(x);$$ vemo, da $R_{n+1}(x) \to 0$ pri $n \to \infty$, $x \in \mathbb{R}$ [illegible]!

$$\exp(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = E(x).$$

Od [illegible] $\exp(x) = E(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$; $x \in \mathbb{C}$.

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}; \quad \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

Lemma. $$e^{x+iy} = e^x \left[\cos y + i \sin y\right];$$

$\forall x, y \in \mathbb{R}$.
$$\sin x = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right) = \frac{1}{i} \sinh(ix)$$
$$\cos x = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right) = \cosh(ix).$$

$$e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy};$$

$$e^{iy} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(iy)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \boxed{i^k} y^k = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(2l)!} i^{2l} y^{2l} + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(2l+1)!} i^{2l+1} y^{2l+1}$$

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$
$$e^{-ix} = \cos(-x) + i \sin(-x) = \cos x - i \sin x$$

$i^0 = 1$

$i^1 = i$

$i^2 = -1$

$i^3 = -i$

$i^4 = 1$

$$i^{2l} = (i^2)^l = (-1)^l$$
$$i^{2l+1} = (-1)^l \cdot i$$