13. Metrické prostory.

Definice. Metrickým prostorem rozumíme dvojici (X, ϱ), kde X je množina a funkce $x, y \mapsto \varrho(x,y)$ je tzv. metrika, splňující (pro všechna x, y, $z \in X$):
(i) $\varrho(x,y) \geq 0$, přičemž $\varrho(x,y) = 0$ právě když $x = y$
(ii) $\varrho(x,y) = \varrho(y,x)$ (symetrie)
(iii) $\varrho(x,z) \leq \varrho(x,y) + \varrho(y,z)$ (trojúhelníková nerovnost)

Poznámky. Metrický prostor (dále m.p.) je obecná matematická struktura, v níž je možné měřit vzdálenost. Díky metrice zavedeme okolí, a tudíž i všechny základní pojmy analýzy (limita, konvergence, spojitost) ve zcela obecné situaci.

Příklady. ① $\mathbb{R}$ s metrikou $\varrho(x,y) = |x-y|$
② na libovolné množině P lze zavést ,,diskrétní metriku" jako

$$\varrho(x,y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$$

Opakování. Vektorový prostor X je množina, jejíž prvky lze sčítat, násobit skalárem (typicky z $\mathbb{R}$), a obsahuje prvek $\mathbf{0}$ (nulový vektor.)

Definice. Normovaný vektorový prostor je dvojice $(X, \|\cdot\|)$, kde X je vektorový prostor, a norma je přiřazení $x \mapsto \|x\|$, splňující:

1. $\|x\| \geq 0$, a $\|x\| = 0$ právě když $x = \mathbf{0}$
2. $\|ax\| = |a|\|x\|$ pro $\forall a \in \mathbb{R}$
3. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ ($\triangle$-nerovnost)

Příklady. ① Na $\mathbb{R}^n$ lze zavést různé normy: $\|x\|_1 = \sum_i |x_i|$, $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$, nejčastější je Eukleidovská norma

$$\|x\| = \sqrt{\sum_i x_i^2}\,, \qquad \text{kde } \mathbb{R}^n \ni x = (x_1, \dots, x_n)\,.$$

② Na prostoru $C([a,b])$ – spojité funkce $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ – se obvykle používá ,,supremová" norma

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)|;\ x \in [a,b]\}\,.$$

Jiná norma na témže prostoru je tzv. L^1 norma:

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|\, dx\,.$$

Důležitý příklad. Normovaný prostor je metrický prostor, kde metriku definujeme jako $\varrho(x,y) = \|x-y\|$.

Definice. (X,ϱ) je m.p., $x \in X$, $\delta > 0$. Definujeme kruhové okolí

$$U(x,\delta) = \{y \in X;\ \varrho(x,y) < \delta\}$$

a prstencové okolí

$$P(x,\delta) = \{y \in X;\ 0 < \varrho(x,y) < \delta\} = U(x,\delta) \setminus \{x\}\,.$$

Množina $G \subset X$ se nazve otevřená, jestliže

$$\big(\forall x \in A\big)\big(\exists \delta > 0\big)\big[U(x,\delta) \subset A\big]\,.$$

Množina $F \subset X$ se nazve uzavřená, jestliže její doplněk $F^c = X \setminus F$ je otevřená množina.

Příklady. V $\mathbb{R}$ s obvyklou metrikou $\varrho(x,y) = |x-y|$: (a,b) je otevřená, $[a,b]$ uzavřená. Množina $[0,1)$ není ani otevřená, ani uzavřená. Prázdná množina je zároveň otevřená i zavřená.

Věta 13.1 [vlastnosti otevřených množin] (X,ϱ) je m.p. Potom
(1) X, $\emptyset$ jsou otevřené množiny
(2) G_α otevřené pro $\forall \alpha \in \mathcal{A} \implies \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} G_\alpha$ je otevřená
(3) $G_1, \ldots, G_N$ jsou otevřené $\implies \bigcap_{n=1}^{N} G_n$ je otevřená

Poznámka. konečný počet množin v bodě (3) je podstatný: množiny $(-1/n, 1/n)$ jsou otevřené, jejich průnik přes $n \in \mathbb{N}$ je však uzavřená množina $\{0\}$.

Věta 13.1' [vlastnosti uzavřených množin] (X,ϱ) je m.p. Potom
(1) X, $\emptyset$ jsou uzavřené množiny
(2) F_α uzavřené pro $\forall \alpha \in \mathcal{A} \implies \bigcap_{\alpha\in\mathcal{A}} F_\alpha$ je uzavřená
(3) $F_1, \ldots, F_N$ jsou uzavřené $\implies \bigcup_{n=1}^{N} F_n$ je uzavřená

Definice. (X,ϱ) je m.p., $\{x_n\} \subset X$ posloupnost bodů. Řekneme, že $\{x_n\}$ má limitu $x_0 \in X$ (neboli konverguje k x_0), jestliže

$$\big(\forall \varepsilon > 0\big)\big(\exists n_0 \in \mathbb{N}\big)\big[n \geq n_0 \implies x_n \in U(x_0,\varepsilon)\big]\,.$$

Značíme: $x_n \to x_0$ pro $n \to \infty$, nebo $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$.
Ekvivalentní je požadovat, aby posloupnost (reálných čísel) $\varrho(x_n, x_0)$ měla limitu 0.

Věta 13.2 [charakterizace uzavřených množin pomocí posloupností] (X,ϱ) je m.p., $F \subset X$. Potom je ekvivalentní:

(1) F je uzavřená
(2) Jsou-li $x_n \in F$ libovolné body, splňující $x_n \to x_0$ pro $n \to \infty$, pak nutně též $x_0 \in F$.
Názorně: z uzavřené množiny nelze vykonvergovat.

Definice. (X, ϱ) je m.p. Uzávěr množiny $A \subset X$ definujeme jako

$$\overline{A} = \big\{ y \in X;\ (\forall \delta > 0)\ U(y, \delta) \cap A \neq \emptyset \big\} .$$

Příklady. ① $\overline{(0,1)} = [0,1]$ ② $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$

Věta 13.3 [Vlastnosti uzávěru] (X, ϱ) je m.p., A, $B \subset X$. Potom
(1) $A \subset B \implies \overline{A} \subset \overline{B}$, $\quad \overline{\emptyset} = \emptyset$
(2) $\overline{A}$ je uzavřená množina
(3) $A \subset \overline{A}$, přičemž $A = \overline{A}$, právě když A je uzavřená
(4) $y \in \overline{A} \iff \exists x_n \in A$, $x_n \to y$ pro $n \to \infty$

Definice. (X, ϱ) je m.p. Hranici množiny $A \subset X$ definujeme jako

$$\partial A = \big\{ y \in X;\ (\forall \delta > 0)\ U(y, \delta) \cap A \neq \emptyset \text{ a zároveň } U(y, \delta) \cap A^c \neq \emptyset \big\} .$$

Věta 13.4 [Vlastnosti hranice]
(1) $\partial A = \overline{A} \cap \overline{A^c}$, $\quad \partial A = \partial A^c$
(2) ∂A je uzavřená, $\quad \overline{A} = A \cup \partial A$
(3) A je uzavřená $\iff \partial A \subset A$, $\quad A$ je otevřená $\iff \partial A \cap A = \emptyset$

Poznámka. Definujeme další pojmy: vnitřek A

$$\operatorname{int} A = \big\{ y \in X;\ (\exists \delta > 0)\ U(y, \delta) \subset A \big\} ,$$

vnějšek A

$$\operatorname{ext} A = \big\{ y \in X;\ (\exists \delta > 0)\ U(y, \delta) \cap A = \emptyset \big\} .$$

Platí:

- $\operatorname{int} A \subset A$, přičemž rovnost právě když A je otevřená;
- $\overline{A} = \operatorname{int} A \cup \partial A$ (disjunktně)
- $X = \operatorname{int} A \cup \partial A \cup \operatorname{ext} A$ (disjunktně)

Definice. (X, ϱ), (Y, σ) jsou m.p. Funkce $f : X \to Y$ se nazve spojitá, jestliže

$$\big(\forall x_0 \in X\big)\big(\forall \varepsilon > 0\big)\big(\exists \delta > 0\big)\big[x \in U_X(x_0, \delta) \implies f(x) \in U_Y(f(x_0), \varepsilon)\big] .$$

Připomenutí. Pro funkci $f : X \to Y$ definujeme vzor množiny $B \subset Y$

$$f^{-1}(B) = \{x \in X;\ f(x) \in B\};$$

– nemá co do činění s inverzním zobrazením, f nemusí být prostá.

Věta 13.5 (X, ϱ), (Y, σ) jsou m.p., $f : X \to Y$. Potom je ekvivalentní:
(1) f je spojitá
(2) pro každou $G \subset Y$ otevřenou je $f^{-1}(G) \subset X$ otevřená
(3) pro každou $F \subset Y$ uzavřenou je $f^{-1}(F) \subset X$ uzavřená

Věta 13.6 [Heineho charakterizace spojitosti.] (X, ϱ), (Y, σ) jsou m.p., $f : X \to Y$. Potom je ekvivalentní:
(1) f je spojitá
(2) pro každý bod $x_0 \in X$ a pro libovolnou posloupnost $\{x_n\} \subset X$, splňující $x_n \to x_0$ pro $n \to \infty$, platí $f(x_n) \to f(x_0)$ pro $n \to \infty$

Věta 13.8 [Spojitost superpozice, součtu atd.]
(1) Nechť (X, ϱ), (Y, σ), (Z, τ) jsou metrické prostory, $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ jsou spojité. Potom $g \circ f : X \to Z$ je spojité.
(2) Je-li (X, ϱ) m.p., $f : X \to \mathbb{R}$, $g : X \to \mathbb{R}$ spojité funkce, potom i $f + g$, $f - g$, $f \cdot g : X \to \mathbb{R}$ jsou spojité. Je-li navíc $g(x) \neq 0$ pro $\forall x \in X$, je také $f/g : X \to \mathbb{R}$ spojitá.

Definice. (X, ϱ), (Y, σ) jsou m.p., $f : X \to Y$ funkce. Řekneme, že $b \in Y$ je limita funkce f v bodě $x_0 \in X$, jestliže

$$\big(\forall \varepsilon > 0\big)\big(\exists \delta > 0\big)\big[x \in P_X(x_0, \delta) \implies f(x) \in U_Y(b, \varepsilon)\big].$$

Značíme $\lim_{x \to x_0} f(x) = b$, nebo $f(x) \to b$ pro $x \to x_0$.

Poznámka. Vidíme, že hodnota $f(x_0)$ nehraje v definici žádnou roli, fakticky zde f nemusí být ani definována.

Věta 13.9 [Heineho charakterizace limity] (X, ϱ), (Y, σ) jsou m.p., $f : X \to Y$ daná funkce, $x_0 \in X$, $b \in Y$. Potom je ekvivalentní:
(1) $\lim_{x \to x_0} f(x) = b$
(2) pro libovolnou posloupnost $\{x_n\} \subset X$, splňující $x_n \to x_0$ pro $n \to \infty$, a zároveň $x_n \neq x_0$ pro $\forall n$, platí $f(x_n) \to b$ pro $n \to \infty$.

Definice. (X, ϱ), (Y, σ) jsou m.p., $f : X \to Y$ funkce. Řekneme, že f je spojitá v bodě $x_0 \in X$, jestliže

$$\big(\forall \varepsilon > 0\big)\big(\exists \delta > 0\big)\big[x \in U_X(x_0, \delta) \implies f(x) \in U_Y(f(x_0), \varepsilon)\big].$$

Poznámky.

- $f : X \to Y$ je spojitá, právě když je spojitá v každém $x_0 \in X$
- $f : X \to Y$ je spojitá v bodě x_0, právě když $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

Definice. Nechť (X, ϱ) je m.p., $\{x_n\} \subset X$ posloupnost bodů. Řekneme, že $\{y_n\}$ je podposloupnost (též vybraná posloupnost), jestliže existuje rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ tak, že $y_n = x_{k_n}$ pro $\forall n$.

Definice. Nechť (X, ϱ) je m.p. Množina $A \subset X$ se nazve kompaktní, jestliže pro libovolnou posloupnost $\{x_n\} \subset A$ existuje podposloupnost $\{x_{k_n}\}$ a bod $x_0 \in A$ tak, že $x_{k_n} \to x_0$ pro $n \to \infty$.

Poznámky. (X, ϱ) je m.p., $\{x_n\}$ posloupnost bodů.

- x_0 se nazve hromadný bod posloupnosti $\{x_n\}$, jestliže existuje podposloupnost $\{x_{k_n}\}$ taková, že $x_{k_n} \to x_0$ pro $n \to \infty$
- ekvivalentně: x_0 je hromadný bod posloupnosti $\{x_n\}$, právě když
$$\big(\forall \varepsilon > 0\big)\big[x_n \in U(x_0, \varepsilon) \quad \text{platí pro nekonečně indexů } n\ \big]\,.$$
- ekvivalentní definice limity: $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$, právě když
$$\big(\forall \varepsilon > 0\big)\big[x_n \in U(x_0, \varepsilon) \quad \text{platí pro všechna } n \text{ až na konečně výjimek}\big]\,.$$
- jestliže $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$, pak x_0 je hromadný bod této posloupnosti, a je to jediný její hromadný bod.
- ekvivalentní definice kompaktnosti: A je kompaktní, právě když libovolná posloupnost $x_n \in A$ má alespoň jeden hromadný bod, který je prvkem A.

Definice. (X, ϱ) je m.p. Množina $A \subset X$ se nazve omezená, jestliže
$$\big(\exists x_0 \in X\big)\big(\exists K > 0\big)\big[A \subset U(x_0, K)\big]\,.$$

Věta 13.7 Nechť (X, ϱ) je m.p. a $A \subset X$ je kompaktní. Potom
(1) A je omezená a uzavřená
(2) Je-li $B \subset A$, a B je uzavřená, pak B je též kompaktní.

Věta 13.10 Nechť (X, ϱ), (Y, σ) jsou m.p., nechť X je kompaktní. Potom
(1) Je-li $f : X \to Y$ spojité, potom $f(X)$ je kompaktní.
(2) Je-li $f : X \to \mathbb{R}$ spojité, potom f je v X omezená, a nabývá zde maxima a minima.

Připomenutí. Funkce $f: X \to \mathbb{R}$ se nazývá omezená, jestliže

$$\big(\exists K > 0\big)\big(\forall x \in X\big)\big[|f(x)| \leq K\big]\,,$$

což je totéž, jako že množina

$$f(X) = \big\{f(x);\ x \in X\big\}$$

je omezená.

Definice. Nechť (X, ϱ) je m.p., Řekneme, že posloupnost $\{x_n\} \subset X$ splňuje Bolzano-Cauchyho podmínku (neboli je cauchyovská), jestliže

$$\big(\forall \varepsilon > 0\big)\big(\exists n_0 \in \mathbb{N}\big)\big[m,\, n \geq n_0 \implies \varrho(x_n, x_m) < \varepsilon\ \big]\,.$$

Pozorování. Jestliže posloupnost $\{x_n\}$ má limitu, pak je cauchyovská.

Definice. Metrický prostor (X, ϱ) se nazve úplný, jestliže libovolná cauchyovská posloupnost bodů z X má zde také limitu.

Definice. Nechť (X, ϱ), (Y, σ) jsou metrické prostory. Funkce $f: X \to Y$ se nazve lipschitzovská, jestliže existuje $L > 0$ tak, že

$$\sigma(f(x), f(y)) \leq L\varrho(x, y) \qquad \forall x, y \in X\,.$$

Je zjevné, že lipschitzovská funkce je spojitá. Funkce, která lipschitzovská s konstantou $L < 1$, se nazývá kontrakce.

Věta 13.11 [Banachova věta o pevném bodě.] Nechť X je úplný metrický prostor, nechť $f: X \to X$ je kontrakce. Potom existuje jediné $x_0 \in X$ tak, že $f(x_0) = x_0$.

Poznámka. Zbytek kapitoly je věnován speciálně situaci v $\mathbb{R}^N$. To, jak známo, je normovaný vektorový prostor, s eukleidovskou normou

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} x_i^2}$$

kde x_i jsou jednotlivé složky vektoru x. Speciálně, $\mathbb{R}^N$ považujeme též za metrický prostor s metrikou $\varrho(x, y) = \|x - y\|$.

Opakování. Prostor se skalárním součinem je dvojice $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, kde X je vektorový prostor, a skalární součin je přiřazení $x,\, y \mapsto \langle x, y\rangle$, splňující:

1. přiřazení $x \mapsto \langle x, y\rangle$ je lineární (při y pevném)

2. $\langle y, x\rangle = \langle x, y\rangle$

3. $\langle x, x\rangle \geq 0$, a $\langle x, x\rangle = 0$ právě když $x = 0$.

Na prostoru se skalárním součinem lze definovat normu předpisem

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}\,. \tag{1}$$

Eukleidovská norma v $\mathbb{R}^n$ je vytvořena pomocí skalárního součinu

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i\,.$$

Fakt, že toto (1) je vždy norma zejména, že splňuje trojúhelníkovou nerovnost), plyne z obecně platící tzv. Cauchy-Schwartzovy nerovnosti:

*** Věta 13.12** [Cauchy-Schwartz] Nechť $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ je prostor se skalárním součin, a $\|\cdot\|$ definujeme pomocí (1). Potom

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$$

pro libovolné prvky x, $y \in X$.

Lemma 13.1 Posloupnost bodů $x_n \in \mathbb{R}^N$ konverguje k $x_0 \in \mathbb{R}^N$, právě když každá složka vektoru x_n konverguje k odpovídající složce vektoru x_0.

Věta 13.13 Množina $A \subset \mathbb{R}^N$ je kompaktní, právě když je omezená a uzavřená.

Poznámka. Implikace kompaktní $\Longrightarrow$ omezená a uzavřená platí obecně (viz Věta 13.7) výše. Obrácená implikace obecně neplatí; fakticky vzato platí pouze v konečně-dimenzionálních prostorech (tj. v $\mathbb{R}^N$).

Věta 13.14 Prostor $\mathbb{R}^N$ je úplný.

Poznámka. Výše uvedené vlastnosti má také množina komplexních čísel $\mathbb{C}$, kterou přirozeně ztotožňujeme s $\mathbb{R}^2$.

Definice. Normovaný vektorový prostor, který je úplný vzhledem k metrice, určené jeho normou, se nazývá Banachův prostor.
Prostor se skalárním součinem, který je úplný vzhledem k metrice, určené normou, kterážto je určena skalárním součinem, se nazývá Hilbertův prostor.