9. Určitý integrál.

Motivace. Studujeme následující problém: je dána funkce $f(x) : [a, b] \to \mathbb{R}$, a my chceme najít číslo, které vyjadřuje plochu pod jejím grafem. Tato hodnota se nazývá určitý integrál (funkce f od a do b), značí se

$$\int_a^b f(x)\, dx\,.$$

Existuje řada způsobů, jak definovat integrál. Ty se neliší hodnotou výsledku; spíše třídou funkcí, které se jimi dají integrovat.
Stručně probereme dva přístupy: Newtonův integrál a Riemannův integrál. Ukážeme, že pro spojité funkce dávají stejné výsledky.

Definice. Je-li dána $f(x) : (a, b) \to \mathbb{R}$, pak $F(x)$ se nazývá primitivní funkce (zkratka PF) k $f(x)$ v (a, b), pokud $F'(x) = f(x)$ pro každé $x \in (a, b)$.

Definice. Nechť $F(x)$ je definována v (a, b). Má-li výraz

$$F(b-) - F(a+) = \lim_{x\to b-} F(x) - \lim_{x\to a+} F(x)$$

smysl, nazýváme ho zobecněným přírustkem funkce $F(x)$ od a do b. Značíme $\big[F(x)\big]_a^b$ nebo $\big[F(x)\big]_{x=a}^{x=b}$.

Poznámky. • je-li $F(x)$ spojitá v $[a, b]$, je $\big[F(x)\big]_a^b = F(b) - F(a)$.
• situace, kdy $\big[F(x)\big]_a^b$ nemá smysl: 1. některá z limit $F(b-)$, $F(b+)$ neexistuje, 2. tyto limity sice existují, ale výraz $F(b-) - F(a+)$ je typu $\infty - \infty$.

Definice. Nechť $f(x)$ je definována v (a, b), a nechť $F(x)$ je PF k $f(x)$ v (a, b). Potom Newtonův integrál funkce $f(x)$ od a do b definujeme jako

$$(\mathcal{N})\int_a^b f(x)\, dx = \big[F(x)\big]_a^b\,,$$

má-li pravá strana smysl.

Příklady. ① $(\mathcal{N})\int_0^\infty \frac{dx}{x} = \infty$
② $(\mathcal{N})\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = 3$
③ $(\mathcal{N})\int_{-\infty}^\infty x\, dx$ neexistuje

Terminologie a značení. Množinu těch funkcí, pro které Newtonův integrál od a do b existuje a je konečný, značíme $\mathcal{N}(a, b)$. Množinu těch funkcí, pro které integrál existuje (a může být konečný nebo nekonečný), značíme $\mathcal{N}^*(a,b)$.

Lemma 9.1.[1] (1) Nechť $\phi(x)$ je spojitá v intervalu I, nechť $\phi'(x) = 0$ pro $\forall x$ vnitřní bod I. Potom $\exists c \in \mathbb{R}$ tak, že $\phi(x) = c$ pro $\forall x \in I$.
(2) Nechť $F(x)$, $G(x)$ jsou spojité v intervalu I, nechť $F'(x)$, $G'(x)$ existují, jsou konečné a rovnají se pro $\forall x$ vnitřní bod I. Potom $\exists c \in \mathbb{R}$ tak, že $F(x) = G(x) + c$ pro $\forall x \in I$.

Důsledek. Definice Newtonova integrálu je korektní.

Poznámky. Lze dokázat, že Newtonův integrál má následující vlastnosti (nebudeme dokazovat z časových důvodů):
① [linearita] Nechť $f(x)$, $g(x) \in \mathcal{N}(a,b)$. Nechť α, $\beta \in \mathbb{R}$. Potom též $\alpha f(x) + \beta g(x) \in \mathcal{N}(a,b)$ a

$$(\mathcal{N})\int_a^b \alpha f(x) + \beta g(x)\,dx = \alpha(\mathcal{N})\int_a^b f(x)\,dx + \beta(\mathcal{N})\int_a^b g(x)\,dx\,.$$

② [intervalová aditivita] Nechť $f(x) \in \mathcal{N}(a,b)$, a $c \in (a,b)$. Potom

$$(\mathcal{N})\int_a^b f(x)\,dx = (\mathcal{N})\int_a^c f(x)\,dx + (\mathcal{N})\int_c^b f(x)\,dx\,.$$

③ [monotonie] Nechť $f(x) \in \mathcal{N}(a,b)$ a nechť $f(x) \geq 0$ pro $\forall x \in (a,b)$. Potom

$$(\mathcal{N})\int_a^b f(x)\,dx \geq 0\,.$$

Obecněji, nechť $f(x)$, $g(x) \in \mathcal{N}(a,b)$ a nechť $f(x) \geq g(x)$ pro $\forall x \in (a,b)$. Potom

$$(\mathcal{N})\int_a^b f(x)\,dx \geq (\mathcal{N})\int_a^b g(x)\,dx\,.$$

④ Nechť $f(x)$, $|f(x)| \in \mathcal{N}(a,b)$. Potom

$$\left|(\mathcal{N})\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq (\mathcal{N})\int_a^b |f(x)|\,dx\,.$$

---

[1] Neodpřednešeno v ZS.

Definice. Dělením D intervalu $[a, b]$ rozumíme konečnou posloupnost bodů $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n$, kde $x_0 = a$, $x_n = b$.
Je-li $f(x) : [a, b] \to \mathbb{R}$ omezená funkce, definujeme pro $i = 1 \ldots n$

$$m_i = \inf f([x_{i-1}, x_i]), \qquad M_i = \sup f([x_{i-1}, x_i]).$$

Čísla

$$s(D) = s(D, f) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_{i-1} - x_i)$$
$$S(D) = S(D, f) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_{i-1} - x_i)$$

nazýváme dolní resp. horní Riemannův součet funkce $f(x)$, příslušný dělení D.

Definice. Nechť $f(x) : [a, b] \to \mathbb{R}$ je omezená funkce. Potom supremum množiny

$$\{s(D);\ D \text{ je dělení } [a, b]\}$$

se nazývá dolní Riemannův integrál $f(x)$ od a do b a značí se

$$(\mathcal{R})\int_{\underline{a}}^{b} f(x)\, dx\,.$$

Naproti tomu infimum množiny

$$\{S(D);\ D \text{ je dělení } [a, b]\}$$

se nazývá horní Riemannův integrál $f(x)$ od a do b a značí se

$$(\mathcal{R})\int_{a}^{\overline{b}} f(x)\, dx\,.$$

Definice. Řekneme, že dělení $\tilde{D}$ je zjemněním dělení D, pokud $\tilde{D}$ obsahuje všechny body D. Značíme $D \subset \tilde{D}$.

Lemma 9.2. Nechť $f(x) : [a, b] \to \mathbb{R}$ je omezená funkce. (1) Jsou-li D, $\tilde{D}$ dělení intervalu $[a, b]$ a $D \subset \tilde{D}$, je $s(D) \le s(\tilde{D})$ a $S(D) \ge S(\tilde{D})$.

(2) Je-li navíc $m \leq f(x) \leq M$, je

$$m(b-a) \leq s(D_1, f) \leq S(D_2, f) \leq M(b-a)$$

pro libovolná dělení D_1, D_2.

Důsledek. Nechť $m \leq f(x) \leq M$ pro $\forall x \in [a,b]$. Potom

$$m(b-a) \leq (\mathcal{R})\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq (\mathcal{R})\overline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq M(b-a)\,.$$

Definice. Nechť $f(x) : [a,b] \to \mathbb{R}$ je omezená funkce. Jestliže

$$(\mathcal{R})\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = (\mathcal{R})\overline{\int_a^b} f(x)\,dx\,,$$

pak toto číslo se nazývá Riemannův integrál funkce $f(x)$ od a do b. Značí se

$$(\mathcal{R})\int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Říkáme, že $f(x)$ má Riemannův integrál (je Riemannovsky integrovatelná) na $[a,b]$, píšeme $f(x) \in \mathcal{R}(a,b)$.

Příklady. ① $(\mathcal{R})\int_0^1 x\,dx = 1/2$.
② Dirichletova funkce není Riemannovsky integrovatelná.

Názorný význam R.i. Označíme-li plochu pod grafem funkce P, plyne z obrázku, že $s(D,f) \leq P$ pro každé dělení, a tedy přechodem k supremu

$$(\mathcal{R})\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq P\,.$$

Analogicky, $S(D,f) \geq P$ pro libovolné dělení, a tedy

$$(\mathcal{R})\overline{\int_a^b} f(x)\,dx \geq P\,.$$

Je-li tedy f Riemannovsky integrovatelná, je nutně

$$P = (\mathcal{R})\int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Lemma 9.3. $f(x) \in \mathcal{R}(a,b)$, právě když je splněna podmínka

$$(P.R.) \qquad \big(\forall \varepsilon > 0\big)\big(\exists \text{ dělení } D\big)\Big[S(D) - s(D) < \varepsilon\Big].$$

Věta 9.1. Nechť $f(x) : [a,b] \to \mathbb{R}$ je monotónní a omezená. Potom $f(x) \in \mathcal{R}(a,b)$.

Lemma 9.4. Nechť $f(x) : [a,b] \to \mathbb{R}$ je spojitá. Potom $f(x)$ má vlastnost stejnoměrné spojitosti v $[a,b]$, tj.

$$\big(\forall \eta > 0\big)\big(\exists \delta > 0\big)\big(\forall x, y \in [a,b]\big)\Big[|x-y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \eta\Big].$$

Věta 9.2. Nechť $f(x)$ je spojitá na $[a,b]$. Potom

1. $f(x) \in \mathcal{R}(a,b)$.

2.

Navíc, posloupnosti $s(D_n, f)$, $S(D_n, f)$ a $\mathscr{S}(D_n, f)$ mají limitu

$$(\mathcal{R})\int_a^b f(x)\,dx$$

pro $n \to \infty$, kde D_n je dělení $[a,b]$ na n stejných dílků.

Poznámka. Druhá část předchozí věty platí obecně pro každou $f(x) \in \mathcal{R}(a,b)$.

Věta 9.3. [Linearita R.i.] Nechť $f(x)$, $g(x) \in C([a,b])$. Potom

$$(\mathcal{R})\int_a^b \alpha f(x) + \beta g(x)\,dx = \alpha \cdot (\mathcal{R})\int_a^b f(x)\,dx + \beta \cdot (\mathcal{R})\int_a^b g(x)\,dx$$

Poznámka. Předchozí věta opět platí za slabšího předpokladu $f(x)$, $g(x) \in \mathcal{R}(a,b)$.

Věta 9.4. [Intervalová aditivita pro R.i.]

1. Nechť $f(x)$ je omezená v $[a,b]$, nechť $c \in (a,b)$. Potom

$$(\mathcal{R})\int_{\underline{a}}^{c} f(x)\,dx + (\mathcal{R})\int_{\underline{c}}^{b} f(x)\,dx = (\mathcal{R})\int_{\underline{a}}^{b} f(x)\,dx$$

$$(\mathcal{R})\int_a^{\overline{c}} f(x)\,dx + (\mathcal{R})\int_c^{\overline{b}} f(x)\,dx = (\mathcal{R})\int_a^{\overline{b}} f(x)\,dx\,.$$

2. Nechť $c \in (a, b)$. Potom $f(x) \in \mathcal{R}(a, b)$ právě když $f(x) \in \mathcal{R}(a, c)$ a zároveň $f(x) \in \mathcal{R}(c, b)$. Za tohoto předpokladu platí:

$$(\mathcal{R})\int_a^c f(x)\,dx + (\mathcal{R})\int_c^b f(x)\,dx = (\mathcal{R})\int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Dodatek k definici R.i. Pro $b < a$ definujeme

$$(\mathcal{R})\int_a^b f(x)\,dx := -(\mathcal{R})\int_b^a f(x)\,dx\,.$$

Dále klademe $(\mathcal{R})\int_a^a f(x)\,dx = 0$.

Poznámka. S výše uvedeným dodatkem platí Věta 9.7. v tomto obecnějším tvaru: je-li $f(x) \in \mathcal{R}(\alpha, \beta)$, a čísla a, b, $c \in [\alpha, \beta]$ jsou libovolná, pak platí:

$$(\mathcal{R})\int_a^c f(x)\,dx + (\mathcal{R})\int_c^b f(x)\,dx = (\mathcal{R})\int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Věta 9.5. [Monotonie R.i.]

1. Jsou-li $f(x)$, $\tilde{f}(x) \in \mathcal{R}(a, b)$, a $f(x) \le \tilde{f}(x)$ pro $\forall x \in [a, b]$, je

$$(\mathcal{R})\int_a^b f(x)\,dx \le (\mathcal{R})\int_a^b \tilde{f}(x)\,dx$$

Speciálně, $f \ge 0$ implikuje $(\mathcal{R})\int_a^b f \ge 0$.

2. Jsou-li $f(x)$, $|f(x)| \in \mathcal{R}(a, b)$, je

$$\left|(\mathcal{R})\int_a^b f(x)\,dx\right| \le (\mathcal{R})\int_a^b |f(x)|\,dx$$

Věta 9.6. [R.i. s proměnnou horní mezí.] Nechť $f(x) \in \mathcal{R}(a, b)$ a $c \in [a, b]$ je pevné. Definuji funkci

$$F(x) := (\mathcal{R})\int_c^x f(t)\,dt\,, \qquad x \in [a, b]\,.$$

Potom:

1. $F(x)$ je spojitá v $[a, b]$.

2. $F'(x_0) = f(x_0)$ platí pro každé $x_0 \in (a, b)$, ve kterém je $f(x)$ spojitá.

Důsledek. Nechť $f(x)$ je spojitá v (a, b). Potom $f(x)$ má v (a, b) primitivní funkci.

Poznámka. Otázka „má daná $f(x)$ primitivní funkci?" má dva aspekty:

- čistě teoreticky, odpověď je ANO, pokud $f(x)$ je spojitá, (viz výše). Také víme, že odpověď je NE, pokud $f(x)$ nemá Darbouxovu vlastnost (díky Větě 6.7.)

- z praktického hlediska zní otázka malinko jinak: dokáži danou PF napsat vzorečkem (tj. vyjářit pomocí elementárních funkcí)? A to v mnoha případech není možné.

Často uváděný příklad: funkce $f(x) = \exp(-x^2)$ určitě má PF (je spojitá), ale dá se dokázat, že tato primitivní funkce se NEDÁ vyjádřit pomocí elementárních funkcí.

Věta 9.7. [Vztah N.i. a R.i.] Nechť $f(x)$ je spojitá v $[a, b]$. Potom $f(x) \in \mathcal{N}(a, b)$ a platí

$$(\mathcal{N})\int_a^b f(x)\,dx = (\mathcal{R})\int_a^b f(x)\,dx\,.$$