

5. PRIMITIVNÍ FUNKCE.

Kdybychom byli přespříliš svědomití, neexistovala by vůbec matematika.
(R. Musil: Zmatky chovance Toerlesse)

Úmluva. V celé kapitole jsou I a J otevřené intervaly.

Definice. Nechtě $F(x), f(x) : I \rightarrow \mathbb{R}$. Řekneme, že $F(x)$ je primitivní funkce k $f(x)$ v intervalu I , jestliže $F'(x) = f(x)$ pro $\forall x \in I$. Značíme

$$\int f(x) dx = F(x) \quad \text{v } I.$$

Terminologie: $F(x)$ se také nazývá neurčitý integrál k $f(x)$, $f(x)$ je integrand, x je integrační proměnná.

Příklady. ① $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ v \mathbb{R} , $n \geq 0$ celé

② $\int \frac{dx}{x^n} = \frac{-1}{(n-1)x^{n-1}}$ v $(-\infty, 0)$ a v $(0, \infty)$, $n \geq 2$ celé

③ $\int \frac{dx}{x} = \ln|x|$ v $(-\infty, 0)$ a v $(0, \infty)$; obecněji $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)|$ v I ,

pokud $f'(x)$ existuje vlastní a $f(x) \neq 0$ všude v I

④ $\int e^x dx = e^x$, $\int \sin x dx = -\cos x$, $\int \cos x dx = \sin x$, vše v \mathbb{R}

⑤ $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x$ v $(-1, 1)$, $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x$ v \mathbb{R}

Věta 5.1. (Linearita integrálu.)

(1)

$$\int af(x) + bg(x) dx = a \int f(x) dx + b \int g(x) dx$$

v každém I , kde mají smysl integrály vpravo;

(2) Jestliže $\int f(y) dy = F(y)$ v J , pak

$$\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b)$$

v každém I takovém, že $\{ax+b : x \in I\} \subset J$.

Věta 5.2. (Integrace per-partes.) Nechtě $u(x), v(x)$ mají vlastní derivace v $\forall x \in I$. Potom

$$\int u'(x)v(x) dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x) dx \quad \text{v } I.$$

Příklady. ① $\int x \ln x \, dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} \ln x$ v $(0, \infty)$

② označme $I_n = \int \frac{dx}{(x^2+1)^n}$, $n \in \mathbb{N}$. Tedy $I_1 = \arctg x$ v \mathbb{R} , a integrací per-partes odvodíme rekurentní vzorec

$$I_{n+1} = \frac{x}{2n(x^2+1)^n} + \frac{2n-1}{2n} I_n \quad n \in \mathbb{N}.$$

Věta 5.3. (1. věta o substituci.) Nechť $\int g(y) \, dy = G(y)$ v J , a nechť $f(x) : I \rightarrow J$ má vlastní derivaci v $\forall x \in I$. Potom

$$\int g(f(x))f'(x) \, dx = G(f(x)) \quad \text{v } I.$$

Příklady. ① $\int x e^{x^2} \, dx = \frac{1}{2} e^{x^2}$ v \mathbb{R}

② $\int \cos^5 x \, dx = \sin x - \frac{2}{3} \sin^3 x + \frac{1}{5} \sin^5 x$ v \mathbb{R}

Rozklad polynomů. Každý (nenulový) polynom $Q(x)$ lze rozložit

$$Q(x) = A \prod_{j=1}^k (x - a_j)^{p_j}$$

kde $a_j \in \mathbb{C}$ se nazývají kořeny, p_j jejich násobnosti. Platí $\sum_{j=1}^k p_j$ rovná se stupeň $Q(x)$.

Důsledek: každý (nenulový) polynom je roven nule v nejvýše konečně bodech; pokud se dva polynomy shodují v nekonečně bodech, jsou nutně totožné (mají stejné koeficienty.)

Pokud má $Q(x)$ reálné koeficienty a $a = \alpha + i\beta$ je kořen násobnosti p , tak $\bar{a} = \alpha - i\beta$ je také kořen (stejně násobnosti) a platí

$$(x - a)^p (x - \bar{a})^p = [(x - a)(x - \bar{a})]^p = [x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2]^p,$$

přičemž posledně uvedený polynom druhého stupně nemá tedy žádné reálné kořeny.

Tedy každý polynom s reálnými koeficienty lze rozložit

$$Q(x) = A \prod_{j=1}^m (x - a_j)^{p_j} \prod_{k=1}^n (x^2 + b_k x + c_k)^{q_k}, \quad (*)$$

kde A, a_j, b_k, c_k jsou reálná čísla, tj. a_j jsou reálné kořeny $Q(x)$ násobnosti p_j , zatímco polynomy $x^2 + b_k x + c_k$ skrývají dvojici komplexně sdružených kořenů násobnosti q_k .

Věta F. (Rozklad na parciální zlomky.) Nechť $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, kde $P(x)$, $Q(x)$ jsou polynomy a stupeň P je menší než stupeň Q . Nechť $Q(x)$ má rozklad (*). Potom existují jednoznačně určená čísla A_{jr} , B_{ks} a $C_{ks} \in \mathbb{R}$ tak, že

$$R(x) = \sum_{j=1}^m \sum_{r=1}^{p_j} \frac{A_{jr}}{(x - a_j)^s} + \sum_{k=1}^n \sum_{s=1}^{q_k} \frac{B_{ks}x + C_{ks}}{(x^2 + b_kx + c_k)^s}$$

platí pro každé x kde $Q(x) \neq 0$.

Integrace racionální funkce. Je-li dána $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, pak:

1. Pokud stupeň P je větší nebo roven stupni Q , dělením převedu na tvar

$$R(x) = p(x) + \frac{\tilde{P}(x)}{Q(x)},$$

kde $p(x)$, $\tilde{P}(x)$ jsou polynomy a stupeň \tilde{P} je menší než stupeň Q .

2. Funkci $\frac{\tilde{P}(x)}{Q(x)}$ rozložím podle Věty F.

3. Integruji jednotlivé členy rozkladu.

Příklad.

$$\begin{aligned} \int \frac{3x}{x^3 - 1} dx &= \int \frac{dx}{x - 1} + \int \frac{-x + 1}{x^2 + x + 1} dx \\ &= \ln|x - 1| - \frac{1}{2} \ln(x^2 + x + 1) + \sqrt{3} \operatorname{arctg} \left(\frac{2x}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \end{aligned}$$

platí v $(-\infty, 1)$ a v $(1, \infty)$.

Věta 5.4. (2. věta o substituci.) Nechť $f(x) : I \rightarrow \mathbb{R}$, nechť $\varphi(t) : J \rightarrow I$ je vzájemně jednoznačná a $\varphi'(t)$ existuje konečná a nenulová pro $\forall t \in J$.

Jestliže

$$\int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = G(t) \quad \text{v } J,$$

pak

$$\int f(x) dx = G(\varphi_{-1}(x)) \quad \text{v } I.$$

Poznámky. • 1. věta o substituci - schematicky:

$$\int g(f(x)) f'(x) dx \Big|_{\substack{y = f(x) \\ dy = f'(x) dx}} = \int g(y) dy = G(y) = G(f(x)).$$

Používá se v případě, že integrand má speciální tvar, tj. složená funkce krát derivace vnitřní funkce. Substituovaná funkce $f(x)$ nemusí být prostá.

• 2. věta o substituci - schematicky:

$$\int f(x) dx \Big|_{\substack{x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t) dt}} = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = F(t) = F(\varphi^{-1}(x)).$$

V tomto případě substituovaná funkce $\varphi(t)$ musí být vzájemně jednoznačná a $\varphi'(t) \neq 0$. Druhá věta o substituci se používá hlavně ve standardních situacích, viz dále.

Typové substitute. V dalším je $R = R(u, v)$ racionální funkce dvou proměnných, tj. R je z u, v vytvořena operacemi $+$, $-$, \cdot a $/$.

①

$$\int R\left(x, \sqrt[k]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx.$$

Substituce $t = \sqrt[k]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ vede na integraci racionální funkce.

Příklad:

$$\int \frac{dx}{x + 2\sqrt{x-1}}.$$

Polož $t = \sqrt{x-1}$, tj. $x = \varphi(t) = t^2 + 1$, $\varphi'(t) = 2t$ - předpoklady Věty 5.4 splněny ($I = (1, \infty)$, $J = (0, \infty)$); dostáváme

$$\int \frac{2t dt}{(t+1)^2} = 2 \ln(t+1) + \frac{2}{t+1} \quad \text{v } J.$$

Po zpětné substituci je výsledek $2 \ln(1 + \sqrt{x-1}) + 2/(1 + \sqrt{x-1})$ v $(1, \infty)$.

②

$$\int R(\sin x, \cos x) dx.$$

Používá se substituce $t = \operatorname{tg}(x/2)$, tj. $x = \varphi(t) = 2 \operatorname{arctg} x$. Odsud

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2}{1+t^2} dt,$$

což vede opět na integraci racionální funkce. Pozor: substituce dává výsledek jen pro $x \in (-\pi, \pi)$.

Příklad:

$$\int \frac{dx}{2 + \cos x};$$

vede na integrál

$$\int \frac{2 dt}{t^2 + 3} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left(\frac{t}{\sqrt{3}} \right).$$

Tedy

$$\int \frac{dx}{2 + \cos x} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left(\frac{\operatorname{tg}(x/2)}{\sqrt{3}} \right);$$

platí v $(-\pi, \pi)$ a díky periodicitě v každém intervalu $((2k-1)\pi, (2k+1)\pi)$. Pokud chci primitivní funkci na delším intervalu, musím výsledek provést slepení (zespojiténí) výsledné funkce

$$F_0(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left(\frac{\operatorname{tg}(x/2)}{\sqrt{3}} \right).$$

Například funkce

$$F_1(x) = \begin{cases} F_0(x), & x \in (-\pi, \pi) \\ \frac{\pi}{\sqrt{3}}, & x = \pi \\ F_0(x) + \frac{2\pi}{\sqrt{3}}, & x \in (\pi, 3\pi) \end{cases}$$

je primitivní k $f(x) = 1/(2 + \cos x)$ v intervalu $(-\pi, 3\pi)$. Pro $x \neq \pi$ je $F_1'(x) = f(x)$ zjevné, v bodě $x = \pi$ to elegantně vyřešíme pomocí pozdějšího Lemmatu 6.4.

③

$$\int R(\exp(ax)) dx$$

se převede na integraci racionální funkce substitucí $t = \exp(ax)$, $dx = dt/at$.

④

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx.$$

Pokud $a < 0$, lze BÚNO předpokládat, že $p(x) = ax^2 + bx + c$ má reálné kořeny. Přepíšeme

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a(x - \lambda)(x - \mu)} = \pm(x - \mu) \sqrt{\frac{a(x - \lambda)}{x - \mu}},$$

čímž obdržíme integrál typu ①. Příklad:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$$

kde $a < b$. Upravíme:

$$\frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = \frac{1}{x-a} \underbrace{\sqrt{\frac{x-a}{b-x}}}_t$$

odtud $x = \frac{t^2 b + a}{1+t^2}$, $dx = \frac{2t(b-a)}{(t^2+1)^2} dt$, integrál po substituci

$$\int \frac{2dt}{1+t^2} = 2 \operatorname{arctg} t,$$

výsledek je $2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x-a}{b-x}}$, platí v (a, b) .

Pro $a > 0$ použijeme Eulerovu substituci

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t - \sqrt{ax}.$$

Ta vede opět na racionální funkci, navíc lze dokázat, že splňuje předpoklady Věty 5.4. na všech intervalech, kde je $p(x) > 0$. Příklad:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + x + 1}},$$

substituce

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + x + 1} &= t - x \\ x^2 + x + 1 &= t^2 - 2tx + x^2 \\ x &= \frac{t^2 - 1}{2t + 1}, \quad dx = \frac{2(t^2 + t + 1)}{(2t + 1)^2} dt \\ \sqrt{x^2 + x + 1} &= t - x = \frac{t^2 + t + 1}{2t + 1} \end{aligned}$$

Integrál po substituci

$$\int \frac{2dt}{t^2 - 1} = \int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \right) dt = \ln |t-1| - \ln |t+1|,$$

výsledek lze zapsat jako

$$\ln \frac{|\sqrt{x^2 + x + 1} + x - 1|}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x + 1},$$

platí v intervalech $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$.

Poznámka. (Integrál a derivace komplexních funkcí.)

Nechť $F(x), f(x) : I \rightarrow \mathbb{C}$. Potom $F'(x) = f(x)$ značí

$$\{\operatorname{Re} F(x)\}' = \operatorname{Re} f(x), \quad \{\operatorname{Im} F(x)\}' = \operatorname{Im} f(x).$$

Stejný význam má $\int f(x) dx = F(x)$.

Díky vzorečku (dokážeme později při přesnějším zavedení elementárních funkcí)

$$\exp[(\alpha + i\beta)x] = \exp(\alpha x)[\cos(\beta x) + i \sin(\beta x)]$$

vyplývá, že $\exp(ax)' = a \exp(ax)$, a také

$$\int \exp(ax) dx = \frac{\exp(ax)}{a}$$

platí pro $a \in \mathbb{C}$. Rozkladem na reálnou a imaginární část získáme užitečné vztahy

$$\begin{aligned} \int \exp(\alpha x) \cos(\beta x) dx &= \frac{\exp(\alpha x)}{\alpha^2 + \beta^2} [\alpha \cos(\beta x) + \beta \sin(\beta x)], \\ \int \exp(\alpha x) \sin(\beta x) dx &= \frac{\exp(\alpha x)}{\alpha^2 + \beta^2} [\alpha \sin(\beta x) - \beta \cos(\beta x)]. \end{aligned}$$