3. Elementární funkce.

Věta C. Existují funkce $\sin(x)$ a $\cos(x)$ z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$ a číslo $\pi \in (0, \infty)$ tak, že platí:

1. $\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$ pro $\forall x,\ y \in \mathbb{R}$,

   $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$ pro $\forall x,\ y \in \mathbb{R}$;

2. $\sin(-x) = -\sin(x)$ pro $\forall x \in \mathbb{R}$,

   $\cos(-x) = \cos(x)$ pro $\forall x \in \mathbb{R}$;

3. funkce $\sin(x)$, $\cos(x)$ jsou spojité v $\mathbb{R}$;

4. funkce $\sin(x)$ je rostouci v $[0, \pi/2]$ a $\sin(0) = 0$, $\sin(\pi/2) = 1$;

5. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$.

Funkce $\sin(x)$, $\cos(x)$ jsou těmito vlastnostmi určeny jednoznačně.

Z 1–5 lze vyvodit všechny další známé vlastnosti funkcí $\sin x$ a $\cos x$.

- $\cos 0 = 1$, neboť $1 = \sin(\pi/2 + 0) = \sin(\pi/2)\cos 0 + \cos(\pi/2)\sin 0 = \cos 0 + 0$ (dle 1, 4)
- $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$, neboť $1 = \cos 0 = \cos(x + (-x)) = \cos(x)\cos(-x) - \sin(x)\sin(-x) = \cos^2(x) + \sin^2(x)$ (dle 1, 2, 4 a předchozího bodu)
- $|\sin(x)| \le 1$, $|\cos(x)| \le 1$ v $\mathbb{R}$ (dle předchozího bodu)
- $\cos(\pi/2) = 0$, $\cos(\pi) = -1$, $\sin(-\pi/2) = -1$

  (dobrovolné domácí cvičení)
- $\cos(x+\pi) = -\cos(x)$, $\sin(x+\pi) = -\sin(x)$, (dle 1 a předchozího)
- funkce $\sin(x)$, $\cos(x)$ jsou 2π-periodické (dle předchozího)
- funkce $\sin(x)$, $\cos(x)$ lze vzájemně nahradit:

  $\sin(x) = \cos(x - \pi/2)$

  $\cos(x) = \sin(x + \pi/2)$

  (dle 1)

- $\sin(a) - \sin(b) = 2\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$
  $\cos(a) - \cos(b) = -2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$
  - tyto vzorce odvodíme následujícím trikem: položíme $x := (a+b)/2$, $y := (a-b)/2$. Pak $a = x + y$, $b = x - y$ a užijeme vzorce 1.

- další užitečné vzorce:
  $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$
  $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$
  $\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$
  $\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$

- základní limita pro cos: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

Věta D. Existuje funkce $\ln(x)$ z $(0, \infty)$ do $\mathbb{R}$ taková, že

1. $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$ pro $\forall x,\, y \in (0, \infty)$;
2. $\ln(x)$ je rostoucí a spojitá na $(0, \infty)$;
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1.$
   Funkce $\ln(x)$ je těmito vlastnostmi jednoznačně určena.

Z 1–3 plynou další vlastnosti funkce $\ln(x)$:

- $\ln 1 = 0$, neboť $\ln 1 = \ln(1.1) = \ln 1 + \ln 1$
- $\ln(1/x) = -\ln(x)$, neboť $0 = \ln 1 = \ln(x \cdot 1/x) = \ln(x) + \ln(1/x)$
- $\ln(x^n) = n\ln(x)$ pro $n \in \mathbb{N}$, $x > 0$
- $\ln(\sqrt[k]{x}) = (1/k)\ln(x)$ pro $k \in \mathbb{N}$, $x > 0$, neboť $\ln(x) = \ln((\sqrt[k]{x})^k) = k\ln(\sqrt[k]{x})$

- $\lim\limits_{x\to\infty} \ln(x) = \infty$. Chceme ukázat, že

$$\big(\forall K > 0\big)\big(\exists \delta > 0\big)\big[x \in P(\infty, \delta) \implies \ln x > K\big]\,.$$

  Nechť $K > 0$ je dáno: protože $\ln(x)$ je rostoucí, je $\ln 2 > \ln 1 = 0$ a tedy existuje $n \in \mathbb{N}$ tak, že $n \ln 2 > K$. Položme $\delta = 1/2^n$.

  Potom $x \in P(\infty, \delta) \implies x > 2^n \implies \ln x > n \ln 2 > K$.

- $\lim\limits_{x\to 0+} = -\infty$, neboť

$$\lim_{x\to 0+} \ln(x) = \lim_{y\to\infty} \ln(1/y) = \lim_{y\to\infty} [-\ln(y)] = -\infty.$$

- $\ln((0, \infty)) = \mathbb{R}$. Obor hodnot je interval (ze spojitosti); podle předchozího je shora i zdola neomezený.

Věta E. Existuje funkce $\exp(x) : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ taková, že platí:

1. $\exp(x + y) = \exp(x) \exp(y)$ pro $\forall x,\ y \in \mathbb{R}$;
2. $\exp(x)$ je spojitá a rostoucí v $\mathbb{R}$;
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\exp(x) - 1}{x} = 1$.

Funkce $\exp(x)$ je navíc vlastnostmi 1–3 jednoznačně určena.

Samozřejmě funkce $\ln x$ a $\exp x$ jsou vzájemně inverzní. Větu E můžeme také dokázat z Věty D tak, že položíme $\exp = (\ln)_{-1}$ – všechny vlastnosti $\exp(x)$ pak plynou z vlastností $\ln(x)$ a z toho, ze jde o funkce vzájemně inverzní:

- $\exp(x)$ je rostoucí, neboť $\ln(x)$ je rostoucí
- $\exp(x)$ zobrazuje $\mathbb{R}$ vzájemně jednoznačně na $(0, \infty)$
- vlastnost 1 plyne z vlastnosti 1 funkce $\ln(x)$, Věta D
- limita sub 3 plyne ze základní limity pro $\ln(x)$ (vlastnost 3 ve Větě D) a ze spojitosti funkce $\exp(x)$

Funkce $\exp(x)$ má tyto další vlastnosti (dokažte sami):

- $\exp(0) = 1$
- $\exp(-x) = 1/\exp(x)$ pro $\forall x \in \mathbb{R}$
- $\exp(nx) = [\exp(x)]^n$ pro $\forall x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$
- $\lim\limits_{x\to\infty} \exp(x) = \infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$

Definice. (Obecná mocnina.) Pro $x > 0$, $a \in \mathbb{R}$ definuji $x^a = \exp(a \ln x)$. Dále definuji $x^0 = 1$ pro každé $x \in \mathbb{R}$, speciálně též $0^0 = 1$.

Poznámka. Další důležité (základní) limity pro funkce $\ln x$, $\exp x$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^a}{e^{bx}} = 0, \qquad \lim_{x\to 0+} x^a \ln x = 0,$$

pro libovolná a, $b > 0$. Heslo: logaritmus je slabší než mocnina je slabší než exponenciála. – Dokážeme později pomocí l'Hospitalova pravidla.

Poznámka. Různé definice symbolu mocnina:

- pro $a = n \in \mathbb{N}$ je $x^a = x \cdot x \dots x$ (násobeno n-krát)
- pro $-a = n \in \mathbb{N}$ je $x^a = 1/x^{-a}$ a užiji předchozí definice
- $x^0 = 1$
- pokud $a \notin \mathbb{Z}$, nezbývá než použít definici $x^a = \exp(a \ln x)$ (která ovšem pro $a \in \mathbb{Z}$ dává stejný výsledek jako tři předchozí)

Symbol $\sqrt[k]{x}$ má zvláštní význam, určený Větou B.
Rozdíly a souvislosti: pokud $x > 0$, platí všechno tak, jak očekáváme: $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$, $(x^a)^b = x^{ab}$ atd.
Pokud ovšem $x < 0$, objeví se rozdíly: $\sqrt[3]{-1} = 1$, avšak $(-1)^{\frac{1}{3}}$ není definováno. Podobně $[(-1)^2]^{\frac{1}{4}} = 1^{\frac{1}{4}} = 1$, avšak $(-1)^{2\frac{1}{4}} = (-1)^{\frac{1}{2}}$ není definováno.

Definice. (Další elementární funkce.)
① $\arcsin = \big(\sin|_{[-\pi/2,\pi/2]}\big)_{-1}$

② arccos $= \big(\cos|_{[0,\pi]}\big)_{-1}$
③ $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$
④ $\operatorname{arctg} x = \big(\operatorname{tg}_{(-\pi/2,\pi/2)}\big)_{-1}$
⑤ $\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$, $x \neq k\pi$

Definice. Funkce se nazve (na daném definičním oboru) elementární, jestliže je to:
(1) polynom, racionální funkce, odmocnina
(2) sin, cos, exp, ln
(3) arcsin, arccos, arctg
(4) jakákoliv další funkce, která vznikne z předchozích konečným opakováním operací sčítání, odčítání, násobení, dělení a skládání.

Poznámky.
• funkce $\sinh x = \frac{1}{2}(\exp x - \exp(-x))$ (hyperbolický sinus) je zjevně elementární. Funkce k ní inverzní (zvaná argsinh) ovšem také, protože $\operatorname{argsinh} y = \ln(y + \sqrt{y^2+1})$
• ve skutečnosti se všechny elementární funkce dají vytvořit pomocí exp a ln, pokud povolíme komplexní argumenty: např. $\sin x = \frac{1}{2i}(\exp(ix) - \exp(-ix))$, $\arcsin x = -i \ln(ix + \sqrt{1-x^2})$.
• příklad funkce, která není elementární (na žádném intervalu): Dirichletova funkce