(2e) $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} < \frac{n-1}{n+1}$:

$n=2$: $\frac{1}{4} < \frac{1}{3}$ o.k.

indukční předpoklad

$n \mapsto n+1$: $\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(n+1)^2} < \frac{n-1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2}$

stačí ověřit: $\frac{n-1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{n}{n+2}$

$$\frac{n^2}{(n+1)^2} \leq \frac{n}{n+2}$$

$$n(n+2) \leq (n+1)^2$$

$$n^2+2n \leq n^2+2n+1$$ platí.

(2f) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq 2\sqrt{n}$;

$n=1$: $1 \leq 2\sqrt{1}$ o.k.

$n \mapsto n+1$: chci ověřit: $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} \leq 2\sqrt{n+1}$

LS: $\underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}_{\leq 2\sqrt{n} \text{ již víme}} + \frac{1}{n+1} \leq 2\sqrt{n} + \frac{1}{n+1}$; stačí tedy ověřit:

$$2\sqrt{n} + \frac{1}{n+1} \leq 2\sqrt{n+1}$$

$$\frac{1}{n+1} \leq 2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$$

$$\frac{1}{n+1} \leq \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$\sqrt{n+1}+\sqrt{n} \leq 2(n+1);$$

platí, neboť

$\sqrt{n} \leq \sqrt{n+1} \leq n+1$; $n \geq 1$

(2g) $(1+x)^n \ge 1+nx$; $x \ge -1$.

$n=1$: $(1+x)^1 \ge 1+x$ o.k.

$n \mapsto n+1$: chci ukázat: $(1+x)^{n+1} \ge 1+(n+1)x$

LS: $(1+x)^n \cdot (1+x) \ge (1+nx)\cdot(1+x)$; díky i.p. a tomu, že $(1+x) \ge 0$ $(x \ge -1)$!!

$$= 1+(n+1)x + \underbrace{nx^2}_{\ge 0}$$

$$\ge 1+(n+1)x \text{ ; q.e.d.}$$

(2h) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{n}$; $n \ge 2$

$n=2$: $1+\frac{1}{\sqrt{2}} > \sqrt{2}$ $/^2$

$1+2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2} > 2$ o.k.; neboť $2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} > 1$..

$n \to n+1$: chci ukázat $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{n+1}$.

LS: $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} > \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ díky i.p.;

stačí ověřit: $\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \ge \sqrt{n+1}$

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} \ge \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

zřejmě platí (menší čitatel $\Rightarrow$ větší zlomek)

(2x) $n^2 \le 2^n \quad \forall n \ge 4.$

$n=4$: $16 \le 16$ o.k.

$n \mapsto n+1$: chci ukázat $(n+1)^2 \le 2^{n+1}$

LS: $(n+1)^2 = n^2+2n+1 \le 2^n+2n+1$ díky i.p.

stačí tedy ověřit: $2^n+2n+1 \le 2^{n+1} = 2\cdot 2^n$

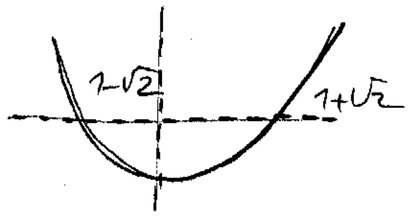
$$2n+1 \le 2^n;$$

protože $n^2 \le 2^n$; stačí ověřit $2n+1 \le n^2$

$$0 \le n^2-2n-1.$$

jistě platí pro

$n \ge 4 > 1+\sqrt{2}$.



(2y) $(n+1)^n \le n^{n+1}$; $n \ge 3$

$n=3$: $64 \le 81$ o.k.; obecně úprava: $(n+1)^n \le n \cdot n^n$

$$\frac{(n+1)^n}{n^n} \le n$$

$$\boxed{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \le n}$$

$n \mapsto n+1$: chci ukázat:

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \le n+1.$$

LS: $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n\left(1+\frac{1}{n+1}\right) \le \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1+\frac{1}{n+1}\right) \le n\cdot\left(1+\frac{1}{n+1}\right).$

díky tomu, že $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$ a i.p.

stačí tedy ukázat: $n\left(1+\frac{1}{n+1}\right) \le n+1$

$$\frac{n(n+2)}{n+1} \le n+1$$

$n^2+2n = n(n+2) \le (n+1)^2 = n^2+2n+1$; platí

(2.2) $n! \le \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$; $n \ge 1$.

$n=1$: $1 \le \left(\frac{2}{2}\right)^1$ o.k.

$n \mapsto n+1$: chci dokázat $(n+1)! \le \left(\frac{n+2}{2}\right)^{n+1}$.

LS: $(n+1)! = (n!) \cdot n+1 \le \left(\frac{n+1}{2}\right)^n \cdot n+1$ dle i.p.

stačí ověřit: $\frac{(n+1)^{n+1}}{2^n} \le \frac{(n+2)^{n+1}}{2^{n+1}}$

$$2 \le \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

dle Bernoulliho nerovnosti: $(1+x)^m \ge 1+mx$
$\left(x=\frac{1}{n+1}\,;\ m=n+1\right)$

je PS $\ge 1+(n+1)\cdot\frac{1}{n+1} = 2$; q.e.d.

Pozn.: problém je ekvivalentní: $\sqrt[n]{1\cdots n} \le \frac{n+1}{2} = \frac{1+\cdots+n}{n}$

což plyne z AG-nerovnosti