Uvažujeme systém (SLIAR)

$$\begin{aligned} S' &= -\beta S(I+\delta A) \\ L' &= \beta S(I+\delta A) - \kappa L \\ I' &= p\kappa L - \alpha I \\ A' &= (1-p)\kappa L - \eta A \\ R' &= f\alpha I + \eta A \end{aligned}$$

s počátečními podmínkami $S(0) = S_0 > 0$, $I(0) = I_0 > 0$ a $L(0) = A(0) = R(0) \geq 0$. Konstanty: β, κ, α, δ a $\eta > 0$; p, $f \in (0,1)$.

Příklad 1 [Lemma III.1] Dokažte, že S, L, I, A, $R > 0$ pro $t > 0$.

Příklad 2 [Lemma III.2] Dokažte, že $S(t) \searrow S_\infty > 0$, $R(t) \nearrow R_\infty < \infty$ a $L(t)$, $I(t)$, $A(t) \to 0$ pro $t \to \infty$.

Příklad 3 [Lemma III.3] Odvoďte „final size relation"

$$\ln S_0 - \ln S_\infty = \mathcal{R}_0 \left(1 - \frac{S_\infty}{S_0}\right) + \frac{\beta}{\alpha} I_0,$$

kde

$$\mathcal{R}_0 = S_0 \beta \left[\frac{p}{\alpha} + \frac{\delta(1-p)}{\eta}\right]$$

je tzv. *základní reprodukční číslo.*

Nápověda.

1 — z linearity 1.rce $S > 0$ pro $t \geq 0$. Označme $T = \inf\{t > 0; (I(t) + \delta A(t)) = 0\}$. Pomocí integračního faktoru $e^{\kappa t}$ z 2.rce $L > 0$ na $(0, T]$. Podobně dále $I(T)$, $A(T) > 0$ – spor.

2 — z 1.rce $S(t) \searrow S_\infty \geq 0$ a $S(I + \delta A) \in L^1(0, \infty)$. Odtud z 2.rce $L \in L^1(0,\infty)$ a $L(t) \to L_\infty \geq 0$; tedy nutně $L_\infty = 0$. Podobně pro I, A; nakonec z 1.rce konečnost $\ln(S_\infty/S_0)$.

3 — integrujte rovnice přes $(0, \infty)$ (první rovnici také po vydělení S.)