V úlohách předpokládejte značení a odhady, dokázané v průběhu Věty I.4.

Příklad 0 Nechť $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$ je Coulombovo tření, tj. $(y, F) \in \mathcal{A}$, právě když $y = 0$ a $|F| \leq 1$, nebo $y > 0$ a $F = 1$, nebo $y < 0$ a $F = -1$. Charakterizujte (a nakreslete) množinu dvojic (y, F), splňujících $(y - F/n, F) \in \mathcal{A}$.

Příklad 1 Uvažujeme rovnici

$$F = h_n(y, F), \tag{1}$$

kde

$$h_n(y, F) = \frac{n}{n+1}\big[y + \varphi(y + \frac{n-1}{n}F)\big],$$

$\varphi(\cdot)$ je 1-Lipschitzovská funkce. Dedukujte z Věty 16.2, že (1) lze napsat ekvivalentně jako

$$F = g_n(y).$$

Ukažte dále (případnou modifikací důkazu této věty), že $g_n(\cdot)$ je Lipschitzovská. Odhadněte konstantu Lipschitzovskosti.

Příklad 2 Ukažte, že z nerovnosti

$$\frac{d}{dt}E(t) + c_1|F_c(t)|^2 \leq c_2 E(t) + |F(t)|^2 + c_3$$

plyne odhad na $\sup_{t\in[0,T]} E(t)$ a také $\int_0^T |F_c(t)|^2 dt$.

Příklad 3 Ukažte, že posloupnosti (y_n, F_n), kde $y_n := x_n' - \frac{1}{n}F_{c,n}$ a $F_n := F_{c,n}$, splňují předpoklady Lemmatu I.3.

Nápověda.
1: z Věty 16.2 plyne, že $|F - g_n(y)| \leq \frac{1}{1-\kappa}|F - h_n(y, F)|$ *pro každé* F. *Volte* $F = g_n(z)$ *a užijte Lipschitzovskosti* h_n *vůči* y.
2: pomocná funkce $Y(t) = E(t) + \int_0^t |F_c(s)|^2 ds$; *tedy* $Y' - c_2 Y \leq \dots$; *integrační faktor.*
3: ukažte podrobně, že stejnoměrná konvergence implikuje slabou v L^2; *také* $n^{-1}F_{c,n}$ *jde slabě do* 0 *díky omezenosti* $F_{c,n}$.