Rovnice matematické fyziky

Milan Pokorný

Přednáška 21.12.2023

24.4.3 Dirichletova úloha pro Laplaceovu rovnici I

Důsledek (3 Jednoznačnost řešení vnitřní Dirichletovy úlohy I V 25.4.25)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je omezená oblast. Potom má Dirichletova úloha pro Poissonovu rovnici na třídě funkcí $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ nejvýše jedno řešení.

24.4.3 Dirichletova úloha pro Laplaceovu rovnici II

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 &\qquad& \text{na } B_R(0) \subset \mathbb{R}^N \\ u &= g && \text{na } \partial B_R(0). \end{aligned} \tag{1}$$

Věta (21 O Greenově funkci pro kouli V 25.4.29)

Nechť $R > 0$ a $g \in C(\partial B_R(0))$. Pak existuje právě jedno klasické řešení úlohy (1) a lze jej psát ve tvaru

$$u(x) = \frac{1}{\kappa_N} \int_{\partial B_R(0)} g(y) \frac{R^2 - |x|^2}{R|x-y|^N} \,\mathrm{d}S(y) \qquad \textit{pro } x \in B_R(0).$$

24.4.3 Dirichletova úloha pro Laplaceovu rovnici III

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 && \text{na } \mathbb{R}^N \setminus \overline{B_R(0)} \\ u &= g && \text{na } \partial B_R(0). \end{aligned} \tag{2}$$

Věta (22 O Greenově funkci pro doplněk koule V 25.4.31)

Nechť $R > 0$ a $g \in C(\partial B_R(0))$. Pak existuje právě jedna harmonická funkce s kontrolovaným růstem řešící klasicky úlohu (2) a lze ji psát ve tvaru

$$u(x) = \frac{1}{\kappa_N} \int_{\partial B_R(0)} g(y) \frac{|x|^2 - R^2}{R|x-y|^N} \, \mathrm{d}S(y) \qquad \text{pro } x \in \mathbb{R}^N \setminus \overline{B_R(0)}.$$

Věta (23 Liouvilleova věta pro harmonické funkce V 25.4.33)

Nechť $u\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ je harmonická funkce na $\mathbb{R}^N$, která je omezená zdola. Pak je konstantní. Analogicky pro harmonickou funkci omezenou shora.

Věta (24 O limitním chování harmonické funkce s kontrolovaným růstem V 25.4.34)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je neomezená množina, pro kterou je $\partial\Omega$ omezená, a nechť $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ je harmonická funkce s kontrolovaným růstem na Ω a $N \geq 3$. Pak pro každý multiindex $\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^N$ platí

$$|D^\alpha u(x)| = O\left(\frac{1}{|x|^{N-2+|\alpha|}}\right) \qquad \text{pro } |x| \to \infty.$$

Je-li $N = 2$ a $|\alpha| > 0$, pak dokonce platí

$$|D^\alpha u(x)| = O\left(\frac{1}{|x|^{1+|\alpha|}}\right) \qquad \text{pro } |x| \to \infty.$$

24.4.3 Dirichletova úloha pro Laplaceovu rovnici IV

Věta (23 Liouvilleova věta pro harmonické funkce V 25.4.33)

Nechť $u\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ *je harmonická funkce na* $\mathbb{R}^N$*, která je omezená zdola. Pak je konstantní. Analogicky pro harmonickou funkci omezenou shora.*

Věta (24 O limitním chování harmonické funkce s kontrolovaným růstem V 25.4.34)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *je neomezená množina, pro kterou je* $\partial\Omega$ *omezená, a nechť* $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ *je harmonická funkce s kontrolovaným růstem na* Ω *a* $N \geq 3$*. Pak pro každý multiindex* $\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^N$ *platí*

$$|D^\alpha u(x)| = \mathrm{O}\left(\frac{1}{|x|^{N-2+|\alpha|}}\right) \qquad \text{pro } |x| \to \infty.$$

Je-li $N = 2$ *a* $|\alpha| > 0$*, pak dokonce platí*

$$|D^\alpha u(x)| = \mathrm{O}\left(\frac{1}{|x|^{1+|\alpha|}}\right) \qquad \text{pro } |x| \to \infty.$$