Rovnice matematické fyziky

Milan Pokorný

Přednáška 11.1.2024

24.4.4 Jednoznačnost řešení Dirichletovy a Neumannovy úlohy pro Poissonovu rovnici I

Věta (28 O nutné podmínce řešitelnosti vnitřní Neumannovy úlohy V 25.4.44)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je omezená oblast s dostatečně „hezkou“ hranicí (jako ve Větě o divergenci, tedy ve Větě 17.3.6). Nechť $f \in C(\overline{\Omega})$ a $g \in C(\partial\Omega)$. Existuje-li funkce $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ taková, že $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \in C(\overline{\Omega})$, $i = 1, 2, \ldots, N$, řešící vnitřní Neumannovu úlohu na Ω s daty f a g, pak

$$-\int_\Omega f \,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} g \,\mathrm{d}S.$$

Věta (29 O jednoznačnosti vnitřní Neumannovy úlohy I V 25.4.46)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je omezená oblast s dostatečně „hezkou“ hranicí (jako ve Větě o integraci per partes, tedy ve Větě 17.3.15). Existuje-li $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ takové, že $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \in C(\overline{\Omega})$, $i = 1, 2, \ldots, N$, řešící vnitřní Neumannovu úlohu pro Poissonovu rovnici na Ω s daty f a g, pak je na této třídě funkcí jednoznačné až na aditivní konstantu.

24.4.4 Jednoznačnost řešení Dirichletovy a Neumannovy úlohy pro Poissonovu rovnici I

Věta (28 O nutné podmínce řešitelnosti vnitřní Neumannovy úlohy V 25.4.44)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je omezená oblast s dostatečně „hezkou“ hranicí (jako ve Větě o divergenci, tedy ve Větě 17.3.6). Nechť $f \in C(\overline{\Omega})$ a $g \in C(\partial\Omega)$. Existuje-li funkce $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ taková, že $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \in C(\overline{\Omega})$, $i = 1, 2, \ldots, N$, řešící vnitřní Neumannovu úlohu na Ω s daty f a g, pak

$$-\int_\Omega f \,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} g \,\mathrm{d}S.$$

Věta (29 O jednoznačnosti vnitřní Neumannovy úlohy I V 25.4.46)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je omezená oblast s dostatečně „hezkou“ hranicí (jako ve Větě o integraci per partes, tedy ve Větě 17.3.15). Existuje-li $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ takové, že $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \in C(\overline{\Omega})$, $i = 1, 2, \ldots, N$, řešící vnitřní Neumannovu úlohu pro Poissonovu rovnici na Ω s daty f a g, pak je na této třídě funkcí jednoznačné až na aditivní konstantu.

24.4.4 Jednoznačnost řešení Dirichletovy a Neumannovy úlohy pro Poissonovu rovnici II

Věta (29 O jednoznačnosti vnější Neumannovy úlohy I V 25.4.48)

Nechť $G \subset \mathbb{R}^N$ je omezená oblast s dostatečně „hezkou“ hranicí (jako ve Větě o integraci per partes, tedy ve Větě 17.3.15). Položme $\Omega := \mathbb{R}^N \setminus \overline{G}$ a předpokládejme, že je souvislá. Nechť existuje $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ takové, že $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \in C(\overline{\Omega})$, $i = 1, 2, \ldots, N$, řešící vnější Neumannovu úlohu pro Poissonovu rovnici na Ω s daty f a g. Jestliže $N \geq 3$, pak je toto řešení na dané třídě funkcí jednoznačné. Jestliže $N = 2$, pak toto řešení je jednoznačné až na aditivní konstantu.

24.4.5 Obecnější přístup k Neumannově úloze I

Definice (3 Regulární derivace podle vnější normály D 25.4.49)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je omezená oblast, jejíž hranice má ve všech svých bodech normálový vektor (jako obvykle budeme jednotkový normálový vektor v bodě $x \in \partial\Omega$ značit $\boldsymbol{\nu}(x)$). Nechť $u \in C^1(\Omega)$. Řekneme, že funkce u má na $\partial\Omega$ *regulární derivaci podle vnější normály*, jestliže existuje

$$\left[\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}_x}(x)\right]_i := \lim_{\alpha \to 0_-} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}_x}(x + \alpha \boldsymbol{\nu}(x)) \qquad \text{pro všechna } x \in \partial\Omega,$$

kde $\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}_x}(x + \alpha \boldsymbol{\nu}(x)) := \nabla u(x + \alpha \boldsymbol{\nu}(x)) \cdot \boldsymbol{\nu}(x)$, a tato konvergence je na $\partial\Omega$ stejnoměrná.

Nechť $G \subset \mathbb{R}^N$ je omezená oblast, pro kterou je $\Omega := \mathbb{R}^N \setminus \overline{G}$ oblast, a jejíž hranice má ve všech svých bodech normálový vektor. Nechť $u \in C^1(\Omega)$ a nechť $\boldsymbol{\nu}(x)$ značí jednotkový vnější normálový vektor k ∂G v bodě $x \in \partial G$. Řekneme, že funkce u má na $\partial G = \partial\Omega$ *regulární derivaci podle vnější normály*, jestliže existuje

$$\left[\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}_x}(x)\right]_e := \lim_{\alpha \to 0_+} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}_x}(x + \alpha \boldsymbol{\nu}(x)) \qquad \text{pro všechna } x \in \partial\Omega,$$

kde $\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}_x}(x + \alpha \boldsymbol{\nu}(x)) := \nabla u(x + \alpha \boldsymbol{\nu}(x)) \cdot \boldsymbol{\nu}(x)$, a tato konvergence je na $\partial\Omega$ stejnoměrná.

Věta (31 O jednoznačnosti vnitřní Neumannovy úlohy II V 25.4.50)

Má-li omezená oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ dostatečně „hezkou“ hranici (jako v předchozích úvahách) a existuje-li řešení vnitřní Neumannovy úlohy pro Poissonovu rovnici, pak je jednoznačné v dané třídě funkcí až na aditivní konstantu.

Věta (32 O jednoznačnosti vnější Neumannovy úlohy II V 25.4.51)

Nechť omezená oblast $G \subset \mathbb{R}^N$ má dostatečně „hezkou“ hranici (podobně jako v předchozích úvahách, ale Ω_α aproximují z vnějšku) a existuje řešení vnější Neumannovy úlohy pro Poissonovu rovnici na $\Omega := \mathbb{R}^N \setminus \overline{G}$, kde Ω je také oblast. Jestliže $N \geq 3$, pak je toto řešení v dané třídě funkcí jednoznačné. Jestliže $N = 2$, pak toto řešení je jednoznačné až na aditivní konstantu.

24.4.5 Obecnější přístup k Neumannově úloze II

Věta (31 O jednoznačnosti vnitřní Neumannovy úlohy II V 25.4.50)

Má-li omezená oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ dostatečně „hezkou" hranici (jako v předchozích úvahách) a existuje-li řešení vnitřní Neumannovy úlohy pro Poissonovu rovnici, pak je jednoznačné v dané třídě funkcí až na aditivní konstantu.

Věta (32 O jednoznačnosti vnější Neumannovy úlohy II V 25.4.51)

Nechť omezená oblast $G \subset \mathbb{R}^N$ má dostatečně „hezkou" hranici (podobně jako v předchozích úvahách, ale Ω_α aproximují z vnějšku) a existuje řešení vnější Neumannovy úlohy pro Poissonovu rovnici na $\Omega := \mathbb{R}^N \setminus \overline{G}$, kde Ω je také oblast. Jestliže $N \geq 3$, pak je toto řešení v dané třídě funkcí jednoznačné. Jestliže $N = 2$, pak toto řešení je jednoznačné až na aditivní konstantu.