Matematika pro fyziky II

Milan Pokorný

Přednáška 15.5.2023

Definice (6 Tenzorový součin distribucí D 24.3.1)

Nechť $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^N$ a $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^M$ jsou otevřené množiny, $T \in \mathcal{D}'(\Omega_1)$ a $G \in \mathcal{D}'(\Omega_2)$. Pak definujeme *tenzorový součin distribucí* T a G předpisy

$$\langle T(x) \otimes G(y), \varphi(x,y)\rangle := \langle T(x), \langle G(y), \varphi(x,y)\rangle\rangle$$

a

$$\langle G(y) \otimes T(x), \varphi(x,y)\rangle := \langle G(y), \langle T(x), \varphi(x,y)\rangle\rangle$$

pro všechna $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_1 \times \Omega_2)$.

Opakování II

Definice (7 Konvergence k 1 D 24.3.11)

Nechť $\{\eta_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^{2N})$. Píšeme, že $\eta_k \to 1$ v $\mathbb{R}^{2N}$, jestliže
(i) pro každý kompakt $K \subset \mathbb{R}^{2N}$ existuje $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\eta_k \equiv 1 \qquad \text{na } K \text{ pro všechna } k \geq k_0$$

(ii) pro každé $\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^{2N}$ je $\{D^{\alpha}\eta_k\}_{k=1}^{\infty}$ stejně stejnoměrně omezená.

Definice (8 Konvoluce distribucí D 24.3.13)

Nechť $T, G \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ a distribuce $T \otimes G$ připouští prodloužení (spojité vůči slabé* konvergenci distribucí)

$$\langle T(x) \otimes G(y), \varphi(x+y) \rangle := \lim_{k \to \infty} \langle T(x) \otimes G(y), \eta_k(x,y)\varphi(x+y) \rangle$$

$$\text{pro všechna } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N),$$

kde $\{\eta_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^{2N})$ splňuje $\eta_k \to 1$ v $\mathbb{R}^{2N}$ a navíc je uvedená limita nezávislá na volbě posloupnosti $\{\eta_k\}_{k=1}^{\infty}$. Pak distribuci $T \star G$ (*konvoluce distribucí* T a G) definujeme předpisem

$$\langle T \star G, \varphi \rangle := \langle T(x) \otimes G(y), \varphi(x+y) \rangle \qquad \text{pro všechna } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N).$$

Opakování II

Definice (7 Konvergence k 1 D 24.3.11)

Nechť $\{\eta_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^{2N})$. Píšeme, že $\eta_k \to 1$ v $\mathbb{R}^{2N}$, jestliže
(i) pro každý kompakt $K \subset \mathbb{R}^{2N}$ existuje $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\eta_k \equiv 1 \qquad \text{na } K \text{ pro všechna } k \geq k_0$$

(ii) pro každé $\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^{2N}$ je $\{D^{\alpha}\eta_k\}_{k=1}^{\infty}$ stejně stejnoměrně omezená.

Definice (8 Konvoluce distribucí D 24.3.13)

Nechť $T, G \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ a distribuce $T \otimes G$ připouští prodloužení (spojité vůči slabé* konvergenci distribucí)

$$\langle T(x) \otimes G(y), \varphi(x+y)\rangle := \lim_{k\to\infty} \langle T(x) \otimes G(y), \eta_k(x,y)\varphi(x+y)\rangle \qquad \text{pro všechna } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N),$$

kde $\{\eta_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^{2N})$ splňuje $\eta_k \to 1$ v $\mathbb{R}^{2N}$ a navíc je uvedená limita nezávislá na volbě posloupnosti $\{\eta_k\}_{k=1}^{\infty}$. Pak distribuci $T \star G$ (*konvoluce distribucí* T a G) definujeme předpisem

$$\langle T \star G, \varphi\rangle := \langle T(x) \otimes G(y), \varphi(x+y)\rangle \qquad \text{pro všechna } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N).$$

Opakování III

Věta (7 O vlastnostech konvoluce distribucí V 24.3.17)

Nechť $T, G \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ *a* $\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^N$.
(i) *Jestliže existuje* $T \star G$, *pak existuje i* $G \star T$ *a platí* $T \star G = G \star T$ *(tedy konvoluce je komutativní).*
(ii) *Jestliže existuje* $T \star G$, *pak existují i* $D^\alpha T \star G$ *a* $T \star D^\alpha G$ *a platí*

$$D^\alpha(T \star G) = D^\alpha T \star G = T \star D^\alpha G.$$

Lemma (6 L 24.3.19)

Nechť $T, G \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ *a pro otevřené množiny* $A, B \subset \mathbb{R}^N$ *splňující* $\operatorname{supp} T \subset A$ *a* $\operatorname{supp} G \subset B$ *je pro každé* $R > 0$ *jim odpovídající množina* T_R *omezená. Potom* $T \star G \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ *existuje a je ji možno popsat formulí*

$$\langle T \star G, \varphi \rangle = \langle T(x) \otimes G(y), \xi(x)\eta(y)\varphi(x+y) \rangle,$$

přičemž ξ *a* η *jsou libovolné funkce z* $C^\infty(\mathbb{R}^N)$, *rovné* 1 *na jistém okolí množin* A *respektive* B *a rovné nule vně jistých okolí množin* A *respektive* B.
Navíc operace $T \mapsto T \star G$ *je spojitá z* $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ *do* $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ *v následujícím smyslu:*
jestliže pro posloupnost $\{T_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ *splňující* $T_k \rightharpoonup^* 0$ *v* $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ *platí* $\operatorname{supp} T_k \subset K$ *pro všechna* $k \in \mathbb{N}$, *kde* $K \subset A$ *je kompaktní množina, pak* $T_k \star G \rightharpoonup^* 0$ *v* $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$.

Opakování III

Věta (7 O vlastnostech konvoluce distribucí V 24.3.17)

Nechť $T, G \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ *a* $\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^N$.
(i) *Jestliže existuje* $T \star G$*, pak existuje i* $G \star T$ *a platí* $T \star G = G \star T$ *(tedy konvoluce je komutativní).*
(ii) *Jestliže existuje* $T \star G$*, pak existují i* $D^\alpha T \star G$ *a* $T \star D^\alpha G$ *a platí*

$$D^\alpha (T \star G) = D^\alpha T \star G = T \star D^\alpha G.$$

Lemma (6 L 24.3.19)

Nechť $T, G \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ *a pro otevřené množiny* $A, B \subset \mathbb{R}^N$ *splňující* $\operatorname{supp} T \subset A$ *a* $\operatorname{supp} G \subset B$ *je pro každé* $R > 0$ *jim odpovídající množina* T_R *omezená.*
Potom $T \star G \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ *existuje a je ji možno popsat formulí*

$$\langle T \star G, \varphi \rangle = \langle T(x) \otimes G(y), \xi(x)\eta(y)\varphi(x+y) \rangle,$$

přičemž ξ *a* η *jsou libovolné funkce z* $C^\infty(\mathbb{R}^N)$*, rovné* 1 *na jistém okolí množin* A *respektive* B *a rovné nule vně jistých okolí množin* A *respektive* B.
Navíc operace $T \mapsto T \star G$ *je spojitá z* $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ *do* $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ *v následujícím smyslu:*
jestliže pro posloupnost $\{T_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ *splňující* $T_k \rightharpoonup^* 0$ *v* $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ *platí* $\operatorname{supp} T_k \subset K$ *pro všechna* $k \in \mathbb{N}$*, kde* $K \subset A$ *je kompaktní množina, pak* $T_k \star G \rightharpoonup^* 0$ *v* $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$.

23.3.2 Konvoluce distribucí a temperovaných distribucí I

Věta (8 O existenci konvoluce distribucí V 24.3.20)

Nechť $T, G \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$.
(i) *Jestliže distribuce G má kompaktní nosič, pak existuje $T \star G$ a navíc platí*

$$\langle T \star G, \varphi \rangle = \langle T(x) \otimes G(y), \eta(y)\varphi(x+y) \rangle \qquad \text{pro všechna } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N),$$

kde $\eta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ je libovolná funkce splňující $\eta \equiv 1$ na nějakém okolí $\operatorname{supp} G$.
(ii) *Jestliže distribuce G má kompaktní nosič a navíc $T = T_f$ je regulární distribuce reprezentovaná funkcí $f \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$, pak $T_f \star G$ je regulární distribuce reprezentovaná funkcí*

$$x \mapsto \langle \widetilde{G}(y), f(x-y) \rangle,$$

kde $\widetilde{G}$ je prodloužení distribuce G na prvek $(C^\infty(\mathbb{R}^N))'$.
(iii) *Nechť $N = 1$ a $\operatorname{supp} T$ spolu se $\operatorname{supp} G$ jsou zleva omezené. Pak $T \star G$ existuje a platí*

$$\langle T \star G, \varphi \rangle = \langle T(x) \otimes G(y), \xi(x)\eta(y)\varphi(x+y) \rangle \qquad \text{pro všechna } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),$$

kde ξ, η jsou libovolné $C^\infty(\mathbb{R})$-funkce splňující $\xi \equiv 1$ na nějakém okolí nosiče T a $\eta \equiv 1$ na nějakém okolí $\operatorname{supp} G$, a $\xi \equiv 0$ a $\eta \equiv 0$ na nějakém intervalu tvaru $(-\infty, -K)$, $K > 0$.

23.3.2 Konvoluce distribucí a temperovaných distribucí II

Věta (9 O konvoluci temperovaných distribucí V 24.3.21)

(i) *Nechť* $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ *a* $G \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ *má kompaktní nosič. Pak* $T \star G \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ *a*

$$\langle T \star G, \varphi \rangle = \langle T(x) \otimes G(y), \eta(y)\varphi(x+y) \rangle \qquad \text{pro všechna } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N),$$

kde $\eta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ *je libovolná funkce splňující* $\eta \equiv 1$ *na nějakém okolí* $\operatorname{supp} G$.
(ii) *Pro zafixované* $G \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ *s kompaktním nosičem je operace* $T \mapsto T \star G$ *spojité zobrazení* $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ *do* $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$. *Pro zafixované* $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ *je operace* $G \mapsto T \star G$ *spojité zobrazení distribucí z* $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ *s nosiči obsaženými ve společné kompaktní množině do* $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$.
(iii) *Nechť* $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ *a* $\eta \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. *Pak existuje* $T \star G_\eta$ *a jedná se o regulární temperovanou distribuci reprezentovanou funkcí* $h \in \Theta_M$. *Navíc platí*

$$\langle T \star G_\eta, \varphi \rangle = \langle T, \eta(-x) \star \varphi \rangle \qquad \text{pro všechna } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N),$$

kde $\eta(-x) \star \varphi := \int_{\mathbb{R}^N} \eta(y-x)\varphi(y)\,\mathrm{d}y$, *a existuje* $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *takové, že pro všechna* $\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^N$ *platí (*C *závisí na* α*)*

$$D^\alpha(T \star G_\eta) = T_{D^\alpha h} \quad \text{a} \quad |D^\alpha h(x)| \leq C \|T\|_{\mathcal{S}^{-m}(\mathbb{R}^N)} (1+|x|^2)^m \|\eta\|_{\mathcal{S}^{m+|\alpha|}(\mathbb{R}^N)}.$$

Věta (10 O hustotě regulárních distribucí V 24.3.22)

V prostoru $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ jsou husté regulární distribuce reprezentované funkcemi z $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.

23.3.3 Fourierova transformace konvoluce distribucí I

Věta (11 O reprezentaci Fourierovy transformace distribuce V 23.3.24)

(i) *Nechť* $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ *má kompaktní nosič. Pak* $\mathcal{F}(T)$ *je regulární distribuce reprezentovaná funkcí* $h \in \Theta_M$ *a lze psát*

$$h(\xi) = \langle T(x), \eta(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi(x,\xi)} \rangle \qquad \textit{pro } \xi \in \mathbb{R}^N,$$

kde $\eta \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ *je libovolná funkce, která se rovná jedné na nějakém okolí* supp T. *Dále pro každé* $\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^N$ *platí*

$$D^\alpha \mathcal{F}(T) = T_{D^\alpha h}$$

a existují $c_\alpha \geq 0$ *a* $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *taková, že*

$$|D^\alpha h(\xi)| \leq c_\alpha \|T\|_{\mathcal{S}^{-m}(\mathbb{R}^N)} (1 + |\xi|^2)^{\frac{m}{2}} \qquad \textit{pro všechna } \xi \in \mathbb{R}^N.$$

(ii) *Nechť* T *je taková distribuce, že pro jisté* $\sigma > 0$ *je* $\mathrm{e}^{\sigma|x|^2} T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$. *Pak* $\mathcal{F}(T)$ *je regulární distribuce reprezentovaná funkcí* $g \in \Theta_M$ *a lze psát*

$$g(\xi) = \left\langle \mathrm{e}^{\sigma|x|^2} T(x), \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi(x,\xi)} \mathrm{e}^{-\sigma|x|^2} \right\rangle \qquad \textit{pro } \xi \in \mathbb{R}^N.$$

23.3.3 Fourierova transformace konvoluce distribucí II

Věta (12 První věta o Fourierově obrazu konvoluce distribucí V 24.3.25)

Nechť $T, G \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ *a* G *má kompaktní nosič. Pak*

$$\mathcal{F}(T \star G) = \mathcal{F}(T)\mathcal{F}(G),$$

kde pravou stranu čteme jako $g\mathcal{F}(T)$, *přičemž* $g \in \Theta_M$ *je funkce reprezentující* $\mathcal{F}(G)$.

23.3.3 Fourierova transformace konvoluce distribucí III

Věta (13 Druhá věta o Fourierově obrazu konvoluce distribucí V 24.3.26)
(i) *Nechť* $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ *a* $\eta \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. *Pak*

$$\mathcal{F}(T \star G_\eta) = \mathcal{F}(T)\mathcal{F}(G_\eta),$$

kde pravou stranu čteme jako $g\mathcal{F}(T)$, *přičemž* $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ *je funkce reprezentující* $\mathcal{F}(G_\eta)$.
(ii) *Nechť* $T_f, G_g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ *jsou regulární distribuce, přičemž distribuce* T_f *je reprezentovaná funkcí* $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, *distribuce* G_g *je reprezentovaná funkcí* $g \in L^q(\mathbb{R}^N)$, $p, q \in [1,2]$ *a* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq \frac{3}{2}$. *Pak*

$$\mathcal{F}(T_f \star G_g) = \mathcal{F}(T_f)\mathcal{F}(G_g),$$

kde pravou stranu chápeme jako regulární distribuci T_h *reprezentovanou součinem reprezentujících funkcí distribucí* $\mathcal{F}(T_f)$ *a* $\mathcal{F}(G_g)$. *Navíc* $h \in L^{r'}(\mathbb{R}^N)$, *kde* $r \in [1,2]$ *a je dáno vztahem* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$.