Matematika pro fyziky II

Milan Pokorný

Přednáška 3.4.2023

20 Opakování I

Definice (1 Schwartzův prostor D 21.1.3)

Nechť $N \in \mathbb{N}$. Pak *Schwartzův prostor* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ je množina všech funkcí $f \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$, které splňují

$$\|f\|_{\alpha,\beta} := \|x^\alpha D^\beta f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} < \infty \qquad \text{pro všechna } \alpha, \beta \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^N. \tag{1}$$

Definice (4 Fourierova transformace na Schwartzově prostoru D 21.2.1)

Nechť $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Pak (*přímou*) *Fourierovou transformací* funkce f nazýváme funkci $\xi \in \mathbb{R}^N \mapsto \mathcal{F}(f)(\xi)$ zadanou předpisem

$$\mathcal{F}(f)(\xi) := \int_{\mathbb{R}^N} f(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi(x,\xi)} \,\mathrm{d}x$$

a *inverzní (zpětnou) Fourierovou transformací* funkce f nazýváme funkci $\xi \in \mathbb{R}^N \mapsto \mathcal{F}^{-1}(f)(\xi)$ zadanou předpisem

$$\mathcal{F}^{-1}(f)(\xi) := \int_{\mathbb{R}^N} f(x) \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi(x,\xi)} \,\mathrm{d}x.$$

20 Opakování I

Definice (1 Schwartzův prostor D 21.1.3)

Nechť $N \in \mathbb{N}$. Pak *Schwartzův prostor* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ je množina všech funkcí $f \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$, které splňují

$$\|f\|_{\alpha,\beta} := \|x^\alpha D^\beta f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} < \infty \qquad \text{pro všechna } \alpha, \beta \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^N. \tag{1}$$

Definice (4 Fourierova transformace na Schwartzově prostoru D 21.2.1)

Nechť $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Pak (*přímou*) *Fourierovou transformací* funkce f nazýváme funkci $\xi \in \mathbb{R}^N \mapsto \mathcal{F}(f)(\xi)$ zadanou předpisem

$$\mathcal{F}(f)(\xi) := \int_{\mathbb{R}^N} f(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi(x,\xi)} \,\mathrm{d}x$$

a *inverzní (zpětnou) Fourierovou transformací* funkce f nazýváme funkci $\xi \in \mathbb{R}^N \mapsto \mathcal{F}^{-1}(f)(\xi)$ zadanou předpisem

$$\mathcal{F}^{-1}(f)(\xi) := \int_{\mathbb{R}^N} f(x) \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi(x,\xi)} \,\mathrm{d}x.$$

Opakování II

Definice (5 Fourierova transformace na $L^2(\mathbb{R}^N)$ D 21.4.1)

Nechť $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Pak Fourierovu transformaci funkce f definujeme jako

$$\mathcal{F}(f) := \lim_{n\to\infty} \mathcal{F}(f_n) \quad \text{v } L^2(\mathbb{R}^N),$$

kde $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ je libovolná posloupnost splňující $f_n \to f$ v $L^2(\mathbb{R}^N)$.

Věta (9 O kompatibilitě definic Fourierovy transformace V 21.4.2)

Nechť funkce $f \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^2(\mathbb{R}^N)$. Pak definice Fourierovy transformace pro prostor $L^1(\mathbb{R}^N)$ a pro prostor $L^2(\mathbb{R}^N)$ dávají stejnou funkci.

Opakování II

Definice (5 Fourierova transformace na $L^2(\mathbb{R}^N)$ D 21.4.1)

Nechť $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Pak Fourierovu transformaci funkce f definujeme jako

$$\mathcal{F}(f) := \lim_{n\to\infty} \mathcal{F}(f_n) \quad \text{v } L^2(\mathbb{R}^N),$$

kde $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ je libovolná posloupnost splňující $f_n \to f$ v $L^2(\mathbb{R}^N)$.

Věta (9 O kompatibilitě definic Fourierovy transformace V 21.4.2)

Nechť funkce $f \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^2(\mathbb{R}^N)$. Pak definice Fourierovy transformace pro prostor $L^1(\mathbb{R}^N)$ a pro prostor $L^2(\mathbb{R}^N)$ dávají stejnou funkci.

Opakování III

Věta (10 O vlastnostech Fourierovy transformace na $L^2(\mathbb{R}^N)$ V 21.4.4)

Přímá i inverzní Fourierova transformace jsou prostá spojitá lineární zobrazení prostoru $L^2(\mathbb{R}^N)$ na $L^2(\mathbb{R}^N)$, která jsou navzájem inverzní. Tato zobrazení navíc zachovávají skalární součin, speciálně platí Plancherelova rovnost

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \|\mathcal{F}(f)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \|\mathcal{F}^{-1}(f)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

Důsledek (1 Důsl. 21.4.5)

Nechť $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$, pak (následující rovnost chápeme ve smyslu rovnosti na $L^2(\mathbb{R}^N)$)

$$\mathcal{F}(f) = \lim_{R\to\infty} \int_{B_R(0)} f(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi(x,\xi)}\, \mathrm{d}x.$$

Opakování III

Věta (10 O vlastnostech Fourierovy transformace na $L^2(\mathbb{R}^N)$ V 21.4.4)

Přímá i inverzní Fourierova transformace jsou prostá spojitá lineární zobrazení prostoru $L^2(\mathbb{R}^N)$ na $L^2(\mathbb{R}^N)$, která jsou navzájem inverzní. Tato zobrazení navíc zachovávají skalární součin, speciálně platí Plancherelova rovnost

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \|\mathcal{F}(f)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \|\mathcal{F}^{-1}(f)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

Důsledek (1 Důsl. 21.4.5)

Nechť $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$, pak (následující rovnost chápeme ve smyslu rovnosti na $L^2(\mathbb{R}^N)$)

$$\mathcal{F}(f) = \lim_{R\to\infty} \int_{B_R(0)} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi(x,\xi)}\,\mathrm{d}x.$$

22 Distribuce
22.1 Definice distribuce I

Definice (1 Hladké funkce s kompaktním nosičem str. 136)

Prostor všech takových nekonečněkrát spojitě diferencovatelných funkcí na otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ takových, že jejich nosič je omezený (pro Ω neomezenou) a leží v Ω značíme $\mathcal{D}(\Omega)$.

Definice (2 Konvergence na $\mathcal{D}(\Omega)$ 23.1.1)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená množina a $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}(\Omega)$. Jestliže platí
(i) existuje kompakt $K \subset \Omega$ takový, že $\operatorname{supp} \varphi_k \subset K$ pro všechna $k \in \mathbb{N}$
(ii) $D^\alpha \varphi_k \rightrightarrows 0$ na K pro každý multiindex $\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^N$,

pak píšeme $\varphi_k \overset{\mathcal{D}(\Omega)}{\to} 0$. Dále zavádíme

$$\varphi_k \overset{\mathcal{D}(\Omega)}{\to} \varphi \qquad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \qquad \varphi_k - \varphi \overset{\mathcal{D}(\Omega)}{\to} 0.$$

22 Distribuce
22.1 Definice distribuce I

Definice (1 Hladké funkce s kompaktním nosičem str. 136)

Prostor všech takových nekonečněkrát spojitě diferencovatelných funkcí na otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ takových, že jejich nosič je omezený (pro Ω neomezenou) a leží v Ω značíme $\mathcal{D}(\Omega)$.

Definice (2 Konvergence na $\mathcal{D}(\Omega)$ 23.1.1)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená množina a $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}(\Omega)$. Jestliže platí
(i) existuje kompakt $K \subset \Omega$ takový, že $\operatorname{supp} \varphi_k \subset K$ pro všechna $k \in \mathbb{N}$
(ii) $D^{\alpha}\varphi_k \rightrightarrows 0$ na K pro každý multiindex $\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^N$,

pak píšeme $\varphi_k \overset{\mathcal{D}(\Omega)}{\to} 0$. Dále zavádíme

$$\varphi_k \overset{\mathcal{D}(\Omega)}{\to} \varphi \qquad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \qquad \varphi_k - \varphi \overset{\mathcal{D}(\Omega)}{\to} 0.$$

22.1 Definice distribuce II

Definice (3 Distribuce D 23.1.3)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená množina. Symbolem $\mathcal{D}'(\Omega)$ označujeme množinu všech spojitých lineárních funkcionálů nad $\mathcal{D}(\Omega)$, přičemž pro $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ spojitost chápeme ve smyslu

$$\varphi_k \overset{\mathcal{D}(\Omega)}{\to} \varphi \qquad \Longrightarrow \qquad \langle T, \varphi_k \rangle \to \langle T, \varphi \rangle.$$

Prvky množiny $\mathcal{D}'(\Omega)$ nazýváme *distribuce* na Ω.
Pro $T_1, T_2 \in \mathcal{D}'(\Omega)$ píšeme $T_1 = T_2$ v $\mathcal{D}'(\Omega)$, jestliže

$$\langle T_1, \varphi \rangle = \langle T_2, \varphi \rangle \qquad \text{pro všechna } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

22.2 Základní vlastnosti distribucí I

Věta (1 Kritérium spojitosti lineárního funkcionálu nad $\mathcal{D}(\Omega)$ V 23.2.1)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená množina a $T\colon \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ je lineární funkcionál. Pak je T spojitý právě tehdy, když pro každou otevřenou množinu $\Omega' \subset\subset \Omega$ existují konstanty $M > 0$ a $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ takové, že

$$|\langle T, \varphi\rangle| \leq M\|\varphi\|_{C^m(\overline{\Omega'})} \qquad \text{pro všechna } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega').$$

Definice (4 Řád distribuce V 23.2.2)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená množina a $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ je distribuce. Řekneme, že T má *konečný řád*, jestliže existuje číslo $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ takové, že má vlastnosti z předchozí věty pro všechny otevřené množiny $\Omega' \subset\subset \Omega$ (ale jemu příslušející konstanta M už na Ω' záviset může). Nejmenší takové číslo m nazýváme *řádem* distribuce T v Ω.

22.2 Základní vlastnosti distribucí I

Věta (1 Kritérium spojitosti lineárního funkcionálu nad $\mathcal{D}(\Omega)$ V 23.2.1)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená množina a $T\colon \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ je lineární funkcionál. Pak je T spojitý právě tehdy, když pro každou otevřenou množinu $\Omega' \subset\subset \Omega$ existují konstanty $M > 0$ a $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ takové, že

$$|\langle T, \varphi\rangle| \leq M\|\varphi\|_{C^m(\overline{\Omega'})} \qquad \text{pro všechna } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega').$$

Definice (4 Řád distribuce V 23.2.2)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená množina a $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ je distribuce. Řekneme, že T má *konečný řád*, jestliže existuje číslo $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ takové, že má vlastnosti z předchozí věty pro všechny otevřené množiny $\Omega' \subset\subset \Omega$ (ale jemu příslušející konstanta M už na Ω' záviset může). Nejmenší takové číslo m nazýváme *řádem* distribuce T v Ω.

Definice (5 Nulová distribuce na množině, nosič distribuce, distribuce s kompaktním nosičem D 23.2.4)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená množina a $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ je distribuce. Řekneme, že distribuce T je *nulová* na otevřené množině $\widetilde{\Omega} \subset \Omega$, jestliže

$$\langle T, \varphi \rangle = 0 \qquad \text{pro všechna } \varphi \in \mathcal{D}(\widetilde{\Omega}).$$

Dále definujeme *nosič distribuce* T předpisem

$$\operatorname{supp} T := \Omega \setminus \bigcup \{\widetilde{\Omega} \subset \Omega \colon \widetilde{\Omega} \text{ je otevřená a } T \text{ je nulová na } \widetilde{\Omega}\}.$$

Jestliže navíc platí $\operatorname{supp} T \subset\subset \Omega$, říkáme, že distribuce T má *kompaktní nosič* v Ω.