Matematika pro fyziky II

Milan Pokorný

Přednáška 15.3.2023

Opakování I

Definice (17 Reziduum ve vlastním bodě D 20.7.7)

Nechť $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ a $z_0 \in \mathbb{C}$ je izolovanou singularitou funkce f. Potom reziduum funkce f v bodě z_0 nazýváme koeficient a_{-1} stojící v Laurentově rozvoji u členu $(z - z_0)^{-1}$, tedy

$$\operatorname{Res}_{z_0} f := a_{-1}.$$

Definice (18 Reziduum v nekonečnu D 20.7.7)

Nechť $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ a ∞ je izolovanou singularitou funkce f. Potom reziduum funkce f v bodě ∞ nazýváme hodnotu $-a_{-1}$, kde a_{-1} je koeficient stojící v Laurentově rozvoji u členu $(z - z_0)^{-1}$ v rozvoji na $B_{r,\infty}(z_1)$, tedy

$$\operatorname{Res}_{\infty} f := -a_{-1}.$$

Opakování I

Definice (17 Reziduum ve vlastním bodě D 20.7.7)

Nechť $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ a $z_0 \in \mathbb{C}$ je izolovanou singularitou funkce f. Potom reziduum funkce f v bodě z_0 nazýváme koeficient a_{-1} stojící v Laurentově rozvoji u členu $(z - z_0)^{-1}$, tedy

$$\operatorname{Res}_{z_0} f := a_{-1}.$$

Definice (18 Reziduum v nekonečnu D 20.7.7)

Nechť $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ a ∞ je izolovanou singularitou funkce f. Potom reziduum funkce f v bodě ∞ nazýváme hodnotu $-a_{-1}$, kde a_{-1} je koeficient stojící v Laurentově rozvoji u členu $(z - z_0)^{-1}$ v rozvoji na $B_{r,\infty}(z_1)$, tedy

$$\operatorname{Res}_{\infty} f := -a_{-1}.$$

Opakování II

Věta (36 Reziduová věta V 20.8.17)

Nechť Γ *je kladně orientovaná Jordanova po částech* C^1*-křivka,* $k \in \mathbb{N}$ *a* $a_1, a_2, \dots, a_k \in \operatorname{Int}\Gamma$. *Nechť* $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *je holomorfní na* $\operatorname{Int}\Gamma \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ *a spojitá na* $\overline{\operatorname{Int}\Gamma} \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$. *Pak*

$$\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i} \sum_{j=1}^{k} \operatorname{Res}_{a_j} f.$$

Věta (37 Reziduová věta pro reziduum v nekonečnu V 20.8.19)

Nechť Γ *je kladně orientovaná Jordanova po částech* C^1*-křivka. Nechť* $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *je holomorfní na* $\operatorname{Ext}\Gamma$ *a spojitá na* $\overline{\operatorname{Ext}\Gamma}$. *Pak*

$$\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = -2\pi\mathrm{i} \operatorname{Res}_\infty f.$$

Opakování II

Věta (36 Reziduová věta V 20.8.17)

Nechť Γ *je kladně orientovaná Jordanova po částech* C^1*-křivka,* $k \in \mathbb{N}$ *a* $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \operatorname{Int}\Gamma$*. Nechť* $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *je holomorfní na* $\operatorname{Int}\Gamma \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ *a spojitá na* $\overline{\operatorname{Int}\Gamma} \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$*. Pak*

$$\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i} \sum_{j=1}^{k} \operatorname{Res}_{a_j} f.$$

Věta (37 Reziduová věta pro reziduum v nekonečnu V 20.8.19)

Nechť Γ *je kladně orientovaná Jordanova po částech* C^1*-křivka. Nechť* $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *je holomorfní na* $\operatorname{Ext}\Gamma$ *a spojitá na* $\overline{\operatorname{Ext}\Gamma}$*. Pak*

$$\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = -2\pi\mathrm{i} \operatorname{Res}_\infty f.$$

Opakování III

Věta (38 O součtu reziduí V 20.8.21)

Nechť $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *a* $a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{C}$. *Nechť* $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *je holomorfní na* $\mathbb{C} \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$. *Pak*

$$\operatorname{Res}_{\infty} f + \sum_{j=1}^{k} \operatorname{Res}_{a_j} f = 0.$$

Opakování IV

Věta (39 První věta o výpočtu reziduí V 20.9.2)

Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$, *funkce* $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *má v bodě* z_0 *izolovanou singularitu a funkce* $g, h\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *jsou v bodě* z_0 *holomorfní.*

(i) *Má-li* f *v bodě* z_0 *odstranitelnou singularitu, pak* $\operatorname{Res}_{z_0} f = 0$.

(ii) *Má-li* f *v bodě* z_0 *pól násobnosti nejvýše* $k \in \mathbb{N}$, *pak*

$$\operatorname{Res}_{z_0} f = \lim_{z \to z_0} \left(\frac{1}{(k-1)!} (z - z_0)^k f(z) \right)^{(k-1)}.$$

(iii) *Má-li* f *v bodě* z_0 *pól násobnosti jedna, pak*

$$\operatorname{Res}_{z_0}(fg) = g(z_0) \operatorname{Res}_{z_0} f.$$

Speciálně pokud $g(z_0) = 0$, *pak má funkce* fg *v bodě* z_0 *odstranitelnou singularitu.*

(iv) *Jestliže* h *má v bodě* z_0 *jednoduchý kořen, pak*

$$\operatorname{Res}_{z_0} \left(\frac{g}{h} \right) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

Opakování V

Tvrzení (2 O obíhání části kružnice T 20.9.7)

Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$ *a funkce* $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *má v bodě* z_0 *jednoduchý pól. Nechť* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *splňují* $\alpha < \beta$ *a* $\beta - \alpha \leq 2\pi$*. Pro každé* $\varepsilon > 0$ *definujme křivku* φ_ε *předpisem*

$$\varphi_\varepsilon(t) = z_0 + \varepsilon \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \qquad \text{pro } t \in [\alpha, \beta].$$

Pak

$$\lim_{\varepsilon \to 0_+} \int_{\varphi_\varepsilon} f(z)\,\mathrm{d}z = (\beta - \alpha)\mathrm{i}\,\mathrm{Res}_{z_0} f.$$

Věta (40 Druhá věta o výpočtu reziduí V 20.9.4)

Nechť funkce $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *má v nekonečnu izolovanou singularitu.*
(i) *Platí* $\mathrm{Res}_\infty f = \mathrm{Res}_0 g$, *kde funkce* g *je definovaná předpisem* $g(w) = -\frac{1}{w^2} f(\frac{1}{w})$.
(ii) *Existují-li* $R, K > 0$ *taková, že* $|f(z)| \leq \frac{K}{|z|^2}$ *kdykoliv* $|z| > R$, *pak* $\mathrm{Res}_\infty f = 0$.
(iii) *Má-li* f *v nekonečnu pól násobnosti nejvýše* $k \in \mathbb{N}$, *pak*

$$\mathrm{Res}_\infty f = \lim_{z \to \infty} (-1)^k \frac{1}{(k+1)!} \Big(z^{k+2} f^{(k+1)}(z) \Big).$$

Opakování V

Tvrzení (2 O obíhání části kružnice T 20.9.7)

Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$ *a funkce* $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *má v bodě* z_0 *jednoduchý pól. Nechť* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *splňují* $\alpha < \beta$ *a* $\beta - \alpha \leq 2\pi$*. Pro každé* $\varepsilon > 0$ *definujme křivku* φ_ε *předpisem*

$$\varphi_\varepsilon(t) = z_0 + \varepsilon \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \qquad \textit{pro } t \in [\alpha, \beta].$$

Pak

$$\lim_{\varepsilon \to 0_+} \int_{\varphi_\varepsilon} f(z)\,\mathrm{d}z = (\beta - \alpha)\mathrm{i}\,\mathrm{Res}_{z_0} f.$$

Věta (40 Druhá věta o výpočtu reziduí V 20.9.4)

Nechť funkce $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *má v nekonečnu izolovanou singularitu.*
(i) *Platí* $\mathrm{Res}_\infty f = \mathrm{Res}_0 g$*, kde funkce* g *je definovaná předpisem* $g(w) = -\frac{1}{w^2} f(\frac{1}{w})$.
(ii) *Existují-li* $R, K > 0$ *taková, že* $|f(z)| \leq \frac{K}{|z|^2}$ *kdykoliv* $|z| > R$*, pak* $\mathrm{Res}_\infty f = 0$.
(iii) *Má-li* f *v nekonečnu pól násobnosti nejvýše* $k \in \mathbb{N}$*, pak*

$$\mathrm{Res}_\infty f = \lim_{z \to \infty} (-1)^k \frac{1}{(k+1)!} \left(z^{k+2} f^{(k+1)}(z) \right).$$

19.11 Analytické prodloužení, Γ-funkce

Lemma (7 O holomorfním napojení L 20.10.1)

Nechť $\Omega_1 \subset \mathbb{C}^+$ *a* $\Omega_2 \subset \mathbb{C}^-$ *jsou neprázdné otevřené množiny. Nechť* $\widetilde{M} \subset \mathbb{R}$ *je otevřená množina a pro množinu* $M := \{z \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Re} z \in \widetilde{M}, \operatorname{Im} z = 0\}$ *platí*

$$\overline{\Omega}_1 \cap \overline{\Omega}_2 = \overline{M}$$

a pro každé $t \in \widetilde{M}$ *existuje číslo* $r(t) > 0$ *takové, že kruh* $B_{r(t)}(t + \mathrm{i}0)$ *splňuje*

$$B_{r(t)}(t + \mathrm{i}0) \subset \Omega_1 \cup M \cup \Omega_2.$$

Nechť funkce f_1, $f_2 \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *splňují*

f_j *jsou holomorfní na* Ω_j *a spojité na* $\Omega_j \cup M$ *vzhledem k* $\Omega_j \cup M$ *pro* $j \in \{1, 2\}$

a platí $f_1 = f_2$ *na* M*. Pak množina* $\Omega_1 \cup M \cup \Omega_2$ *je otevřená a funkce*

$$f(z) = \begin{cases} f_1(z) & \textit{pro } z \in \Omega_1 \cup M \\ f_2(z) & \textit{pro } z \in \Omega_2 \end{cases}$$

je holomorfní na $\Omega_1 \cup M \cup \Omega_2$*.*