Matematika pro fyziky II

Milan Pokorný

Přednáška 6.3.2023

Opakování I

Věta (14 Cauchyova věta (druhá verze) V 20.4.5)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je jednoduše souvislá oblast a $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je holomorfní v Ω. Pak pro každou uzavřenou po částech C^1-křivku φ splňující $\langle\varphi\rangle \subset \Omega$ platí

$$\int_{\varphi} f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Věta (15 Cauchyova věta (třetí verze) V 20.4.7)

Nechť $k \in \mathbb{N}$ a $\varphi, \varphi_1, \dots, \varphi_k$ jsou regulární Jordanovy po částech C^1-křivky v $\mathbb{C}$, pro které platí

$$\operatorname{Int}\varphi_j \cup \langle\varphi_j\rangle \subset \operatorname{Int}\varphi \qquad \text{pro všechna } j \in \{1, \dots, k\},$$

$$(\operatorname{Int}\varphi_i \cup \langle\varphi_i\rangle) \cap (\operatorname{Int}\varphi_j \cup \langle\varphi_j\rangle) = \emptyset \qquad \text{kdykoliv } i \neq j$$

a všechny uvedené křivky jsou obíhány ve stejném smyslu. Položme $\Omega := \operatorname{Int}\varphi \setminus \bigcup_{j=1}^{k}(\operatorname{Int}\varphi_j \cup \langle\varphi_j\rangle)$. Nechť funkce $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je holomorfní na Ω a spojitá na $\overline{\Omega}$. Pak

$$\int_{\varphi} f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{j=1}^{k} \int_{\varphi_j} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Opakování I

Věta (14 Cauchyova věta (druhá verze) V 20.4.5)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je jednoduše souvislá oblast a $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je holomorfní v Ω. Pak pro každou uzavřenou po částech C^1-křivku φ splňující $\langle\varphi\rangle \subset \Omega$ platí

$$\int_\varphi f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Věta (15 Cauchyova věta (třetí verze) V 20.4.7)

Nechť $k \in \mathbb{N}$ a $\varphi, \varphi_1, \dots, \varphi_k$ jsou regulární Jordanovy po částech C^1-křivky v $\mathbb{C}$, pro které platí

$$\operatorname{Int}\varphi_j \cup \langle\varphi_j\rangle \subset \operatorname{Int}\varphi \qquad \textit{pro všechna } j \in \{1, \dots, k\},$$

$$(\operatorname{Int}\varphi_i \cup \langle\varphi_i\rangle) \cap (\operatorname{Int}\varphi_j \cup \langle\varphi_j\rangle) = \emptyset \qquad \textit{kdykoliv } i \neq j$$

a všechny uvedené křivky jsou obíhány ve stejném smyslu. Položme $\Omega := \operatorname{Int}\varphi \setminus \bigcup_{j=1}^{k}(\operatorname{Int}\varphi_j \cup \langle\varphi_j\rangle)$. Nechť funkce $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je holomorfní na Ω a spojitá na $\overline{\Omega}$. Pak

$$\int_\varphi f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{j=1}^{k} \int_{\varphi_j} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Opakování II

Věta (17 Cauchyův vzorec V 20.5.1)

Nechť Γ *je kladně orientovaná Jordanova po částech* C^1*-křivka v* $\mathbb{C}$*. Nechť* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *je holomorfní na* $\operatorname{Int}\Gamma$ *a spojitá na* $\overline{\operatorname{Int}\Gamma}$*. Pak pro každé* $z_0 \in \operatorname{Int}\Gamma$ *platí*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\Gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z.$$

Navíc f *má v* $\operatorname{Int}\Gamma$ *derivace všech řádů a pro každé* $z_0 \in \operatorname{Int}\Gamma$ *a každé* $k \in \mathbb{N}$ *platí*

$$f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi \mathrm{i}} \int_\Gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}}\,\mathrm{d}z.$$

Věta (21 Cauchyovy nerovnosti V 20.5.12)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ *je otevřená množina,* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *je holomorfní na* Ω*,* $z_0 \in \Omega$ *a* $r > 0$ *je dost malé, aby* $\overline{B_r(z_0)} \subset \Omega$*. Pak pro všechna* $k \in \mathbb{N}$ *platí*

$$|f^{(k)}(z_0)| \leq \frac{k!}{r^k} \sup_{\langle C_r(z_0)\rangle} |f|.$$

Opakování II

Věta (17 Cauchyův vzorec V 20.5.1)

Nechť Γ *je kladně orientovaná Jordanova po částech* C^1*-křivka v* $\mathbb{C}$*. Nechť* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *je holomorfní na* $\operatorname{Int}\Gamma$ *a spojitá na* $\overline{\operatorname{Int}\Gamma}$*. Pak pro každé* $z_0 \in \operatorname{Int}\Gamma$ *platí*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\Gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, \mathrm{d}z.$$

Navíc f *má v* $\operatorname{Int}\Gamma$ *derivace všech řádů a pro každé* $z_0 \in \operatorname{Int}\Gamma$ *a každé* $k \in \mathbb{N}$ *platí*

$$f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi \mathrm{i}} \int_\Gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}}\, \mathrm{d}z.$$

Věta (21 Cauchyovy nerovnosti V 20.5.12)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ *je otevřená množina,* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *je holomorfní na* Ω*,* $z_0 \in \Omega$ *a* $r > 0$ *je dost malé, aby* $\overline{B_r(z_0)} \subset \Omega$*. Pak pro všechna* $k \in \mathbb{N}$ *platí*

$$|f^{(k)}(z_0)| \leq \frac{k!}{r^k} \sup_{\langle C_r(z_0)\rangle} |f|.$$

Opakování III

Věta (26 O Taylorově řadě příslušející holomorfní funkci V 20.7.1)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina, $z_0 \in \Omega$, $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je holomorfní na Ω a $R > 0$ je tak malé, že $B_R(z_0) \subset \Omega$. Pak existuje jednoznačně určená posloupnost komplexních koeficientů $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ taková, že

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \qquad \text{na } B_R(z_0).$$

Navíc pro každé $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a $r \in (0, R)$ platí

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{C_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \, \mathrm{d}z.$$

Věta (27 O jednoznačnosti V 20.7.2)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je oblast, $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je holomorfní na Ω a množina $\{z \in \Omega\colon f(z) = 0\}$ má alespoň jeden hromadný bod ležící v Ω. Pak $f \equiv 0$ na Ω.

Důsledek (9 Pozn. 20.7.3)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je oblast, f_1 a $f_2\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ jsou holomorfní na Ω, přičemž $f_1 = f_2$ na $M \subset \Omega$, kde M má alespoň jeden hromadný bod ležící v Ω. Pak $f_1 = f_2$ na Ω.

Věta (28 Liouvilleova věta (obecnější verze) V 20.7.4)

Nechť $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je holomorfní na $\mathbb{C}$ a $q, L, R_0 \in [0, \infty)$. Jestliže

$$|f(z)| \leq L|z|^q \qquad \text{kdykoliv } |z| > R_0,$$

pak f je polynom stupně nejvýše $[q]$ (dolní celá část čísla q).

Věta (27 O jednoznačnosti V 20.7.2)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je oblast, $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je holomorfní na Ω a množina $\{z \in \Omega\colon f(z) = 0\}$ má alespoň jeden hromadný bod ležící v Ω. Pak $f \equiv 0$ na Ω.

Důsledek (9 Pozn. 20.7.3)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je oblast, f_1 a $f_2: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ jsou holomorfní na Ω, přičemž $f_1 = f_2$ na $M \subset \Omega$, kde M má alespoň jeden hromadný bod ležící v Ω. Pak $f_1 = f_2$ na Ω.

Věta (28 Liouvilleova věta (obecnější verze) V 20.7.4)

Nechť $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je holomorfní na $\mathbb{C}$ a $q, L, R_0 \in [0, \infty)$. Jestliže

$$|f(z)| \le L|z|^q \qquad \text{kdykoliv } |z| > R_0,$$

pak f je polynom stupně nejvýše $[q]$ (dolní celá část čísla q).

Věta (27 O jednoznačnosti V 20.7.2)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je oblast, $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je holomorfní na Ω a množina $\{z \in \Omega\colon f(z) = 0\}$ má alespoň jeden hromadný bod ležící v Ω. Pak $f \equiv 0$ na Ω.

Důsledek (9 Pozn. 20.7.3)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je oblast, f_1 a $f_2\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ jsou holomorfní na Ω, přičemž $f_1 = f_2$ na $M \subset \Omega$, kde M má alespoň jeden hromadný bod ležící v Ω. Pak $f_1 = f_2$ na Ω.

Věta (28 Liouvilleova věta (obecnější verze) V 20.7.4)

Nechť $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je holomorfní na $\mathbb{C}$ a $q, L, R_0 \in [0, \infty)$. Jestliže

$$|f(z)| \le L|z|^q \qquad \text{kdykoliv } |z| > R_0,$$

pak f je polynom stupně nejvýše $[q]$ (dolní celá část čísla q).

Věta (29 O Laurentově rozvoji V 20.7.6)

Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$, $0 \leq a < b \leq \infty$ a funkce $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je holomorfní na $B_{a,b}(z_0)$. Pak existuje jednoznačně určený systém koeficientů $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ takový, že platí

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \qquad \text{pro všechna } z \in B_{a,b}(z_0)$$

s konvencí

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n := \lim_{k\to\infty} \sum_{n=-k}^{-1} a_n(z - z_0)^n + \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} a_n(z - z_0)^n.$$

Navíc pro všechna $n \in \mathbb{Z}$ a $r \in (a, b)$ platí

$$a_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{C_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \, \mathrm{d}z.$$

19.8 Taylorovy a Laurentovy řady III

Definice (14 Laurentova řada, regulární část Laurentovy řady, hlavní část Laurentovy řady D 20.7.7)

Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$, $0 \le a < b \le \infty$ a funkce $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je holomorfní na $B_{a,b}(z_0)$. Pak se řada z předchozí věty nazývá *Laurentova řada* funkce f na mezikruží $B_{a,b}(z_0)$, její část $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ se nazývá *regulární část* a část $\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z-z_0)^n$ se nazývá *hlavní část*.

Důsledek (9 O korektnosti rezidua v nekonečnu Důsl. 20.7.9)

Nechť $r \in [0,\infty)$, $z_0 \in \mathbb{C}$ a $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je holomorfní na $\mathbb{C} \setminus \overline{B_r(z_0)}$. Pro každé $z_1 \in \mathbb{C}$ pak existuje $r_1 \in [0,\infty)$ takové, že f je holomorfní na $\mathbb{C} \setminus \overline{B_{r_1}(z_1)}$. Navíc

$$a_{-1}^{z_1} = a_{-1}^{z_0},$$

kde $a_{-1}^{z_0}$ a $a_{-1}^{z_1}$ jsou koeficienty z příslušného Laurentova rozvoje na mezikružích kolem nekonečna se středem v z_0 resp. z_1 stojící u $\frac{1}{z-z_0}$ resp. u $\frac{1}{z-z_1}$.

Definice (14 Laurentova řada, regulární část Laurentovy řady, hlavní část Laurentovy řady D 20.7.7)

Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$, $0 \leq a < b \leq \infty$ a funkce $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je holomorfní na $B_{a,b}(z_0)$. Pak se řada z předchozí věty nazývá *Laurentova řada* funkce f na mezikruží $B_{a,b}(z_0)$, její část $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ se nazývá *regulární část* a část $\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z-z_0)^n$ se nazývá *hlavní část*.

Důsledek (9 O korektnosti rezidua v nekonečnu Důsl. 20.7.9)

Nechť $r \in [0, \infty)$, $z_0 \in \mathbb{C}$ a $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je holomorfní na $\mathbb{C} \setminus \overline{B_r(z_0)}$. Pro každé $z_1 \in \mathbb{C}$ pak existuje $r_1 \in [0, \infty)$ takové, že f je holomorfní na $\mathbb{C} \setminus \overline{B_{r_1}(z_1)}$. Navíc

$$a_{-1}^{z_1} = a_{-1}^{z_0},$$

kde $a_{-1}^{z_0}$ a $a_{-1}^{z_1}$ jsou koeficienty z příslušného Laurentova rozvoje na mezikružích kolem nekonečna se středem v z_0 resp. z_1 stojící u $\frac{1}{z-z_0}$ resp. u $\frac{1}{z-z_1}$.

Důsledek (10 Riemannova věta Důsl. 20.7.10)

Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$, $b > 0$ *a* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *je holomorfní a omezená na* $B_{0,b}(z_0)$. *Pak*
(i) *hlavní část Laurentova rozvoje funkce* f *na mezikruží* $B_{0,b}(z_0)$ *je identicky nulová*
(ii) *existuje vlastní* $\lim_{z \to z_0} f(z)$
(iii) *po dodefinování touto limitou je funkce* f *holomorfní na* $B_b(z_0)$.

Důsledek (11 Důsl. 20.7.12)

Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$, $a \geq 0$ *a* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *je holomorfní a omezená na* $B_{a,\infty}(z_0)$. *Pak pro každé* $z_1 \in \mathbb{C}$ *má Laurentův rozvoj funkce* f *na* $B_{a+|z_1-z_0|,\infty}(z_1)$ *nulové koeficienty u kladných mocnin. Navíc existuje vlastní* $\lim_{z \to \infty} f(z)$ *a rovná se koeficientu u nulté mocniny (hodnota zmíněného koeficientu nezávisí na* z_1*).*

19.8 Taylorovy a Laurentovy řady IV

Důsledek (10 Riemannova věta Důsl. 20.7.10)

Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$, $b > 0$ *a* $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *je holomorfní a omezená na* $B_{0,b}(z_0)$. *Pak*
(i) *hlavní část Laurentova rozvoje funkce* f *na mezikruží* $B_{0,b}(z_0)$ *je identicky nulová*
(ii) *existuje vlastní* $\lim_{z \to z_0} f(z)$
(iii) *po dodefinování touto limitou je funkce* f *holomorfní na* $B_b(z_0)$.

Důsledek (11 Důsl. 20.7.12)

Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$, $a \geq 0$ *a* $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *je holomorfní a omezená na* $B_{a,\infty}(z_0)$. *Pak pro každé* $z_1 \in \mathbb{C}$ *má Laurentův rozvoj funkce* f *na* $B_{a+|z_1-z_0|,\infty}(z_1)$ *nulové koeficienty u kladných mocnin. Navíc existuje vlastní* $\lim_{z \to \infty} f(z)$ *a rovná se koeficientu u nulté mocniny (hodnota zmíněného koeficientu nezávisí na* z_1*).*

Definice (15 Izolované singularity a jejich typy D 20.8.1)

Nechť $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ a $z_0 \in \mathbb{C}^*$. Funkce f má v bodě z_0 *izolovanou singularitou*, jestliže je f holomorfní na nějakém prstencovém okolí bodu z_0 a není holomorfní v bodě z_0. O izolované singularitě říkáme, že je
(i) *odstranitelná*, jestliže existuje vlastní $\lim_{z\to z_0} f(z)$
(ii) *pól*, jestliže $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$
(iii) *podstatná*, jestliže $\lim_{z\to z_0} f(z)$ neexistuje.

Věta (30 O charakterizaci odstranitelné singularity V 20.8.3)

Nechť $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ má v bodě $z_0 \in \mathbb{C}$ izolovanou singularitu. Pak následující výroky jsou ekvivalentní.
(i) *Funkce f má v bodě z_0 odstranitelnou singularitu*
(ii) *funkce f je omezená na nějakém prstencovém okolí bodu z_0*
(iii) *hlavní část Laurentovy řady funkce f se středem z_0 je identicky nulová*
(iv) *funkce f lze v bodě z_0 dodefinovat (nebo předefinovat), aby byla holomorfní v bodě z_0.*

19.9 Izolované singularity, rezidua, reziduová věta IV

Definice (15 Izolované singularity a jejich typy D 20.8.1)

Nechť $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ a $z_0 \in \mathbb{C}^*$. Funkce f má v bodě z_0 *izolovanou singularitou*, jestliže je f holomorfní na nějakém prstencovém okolí bodu z_0 a není holomorfní v bodě z_0. O izolované singularitě říkáme, že je

(i) *odstranitelná*, jestliže existuje vlastní $\lim_{z\to z_0} f(z)$

(ii) *pól*, jestliže $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$

(iii) *podstatná*, jestliže $\lim_{z\to z_0} f(z)$ neexistuje.

Věta (30 O charakterizaci odstranitelné singularity V 20.8.3)

Nechť $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ má v bodě $z_0 \in \mathbb{C}$ izolovanou singularitu. Pak následující výroky jsou ekvivalentní.

(i) *Funkce f má v bodě z_0 odstranitelnou singularitu*

(ii) *funkce f je omezená na nějakém prstencovém okolí bodu z_0*

(iii) *hlavní část Laurentovy řady funkce f se středem z_0 je identicky nulová*

(iv) *funkce f lze v bodě z_0 dodefinovat (nebo předefinovat), aby byla holomorfní v bodě z_0.*