Matematika pro fyziky II

Milan Pokorný

Přednáška 1.3.2023

Opakování I

Věta (14 Cauchyova věta (druhá verze) V 20.4.5)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je jednoduše souvislá oblast a $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je holomorfní v Ω. Pak pro každou uzavřenou po částech C^1-křivku φ splňující $\langle \varphi \rangle \subset \Omega$ platí

$$\int_{\varphi} f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Věta (15 Cauchyova věta (třetí verze) V 20.4.7)

Nechť $k \in \mathbb{N}$ a $\varphi, \varphi_1, \dots, \varphi_k$ jsou regulární Jordanovy po částech C^1-křivky v $\mathbb{C}$, pro které platí

$$\operatorname{Int}\varphi_j \cup \langle \varphi_j \rangle \subset \operatorname{Int}\varphi \qquad \text{pro všechna } j \in \{1, \dots, k\},$$

$$(\operatorname{Int}\varphi_i \cup \langle \varphi_i \rangle) \cap (\operatorname{Int}\varphi_j \cup \langle \varphi_j \rangle) = \emptyset \qquad \text{kdykoliv } i \neq j$$

a všechny uvedené křivky jsou obíhány ve stejném smyslu. Položme $\Omega := \operatorname{Int}\varphi \setminus \bigcup_{j=1}^{k}(\operatorname{Int}\varphi_j \cup \langle \varphi_j \rangle)$. Nechť funkce $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je holomorfní na Ω a spojitá na $\overline{\Omega}$. Pak

$$\int_{\varphi} f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{j=1}^{k} \int_{\varphi_j} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Opakování I

Věta (14 Cauchyova věta (druhá verze) V 20.4.5)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je jednoduše souvislá oblast a $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je holomorfní v Ω. Pak pro každou uzavřenou po částech C^1-křivku φ splňující $\langle \varphi \rangle \subset \Omega$ platí

$$\int_\varphi f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Věta (15 Cauchyova věta (třetí verze) V 20.4.7)

Nechť $k \in \mathbb{N}$ a $\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_k$ jsou regulární Jordanovy po částech C^1-křivky v $\mathbb{C}$, pro které platí

$$\operatorname{Int}\varphi_j \cup \langle \varphi_j \rangle \subset \operatorname{Int}\varphi \qquad \text{pro všechna } j \in \{1, \ldots, k\},$$

$$(\operatorname{Int}\varphi_i \cup \langle \varphi_i \rangle) \cap (\operatorname{Int}\varphi_j \cup \langle \varphi_j \rangle) = \emptyset \qquad \text{kdykoliv } i \neq j$$

a všechny uvedené křivky jsou obíhány ve stejném smyslu. Položme $\Omega := \operatorname{Int}\varphi \setminus \bigcup_{j=1}^k (\operatorname{Int}\varphi_j \cup \langle \varphi_j \rangle)$. Nechť funkce $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je holomorfní na Ω a spojitá na $\overline{\Omega}$. Pak

$$\int_\varphi f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{j=1}^k \int_{\varphi_j} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Opakování II

Věta (17 Cauchyův vzorec V 20.5.1)

Nechť Γ *je kladně orientovaná Jordanova po částech* C^1*-křivka v* $\mathbb{C}$*. Nechť* $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *je holomorfní na* $\operatorname{Int}\Gamma$ *a spojitá na* $\overline{\operatorname{Int}\Gamma}$*. Pak pro každé* $z_0 \in \operatorname{Int}\Gamma$ *platí*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\Gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, \mathrm{d}z.$$

Navíc f *má v* $\operatorname{Int}\Gamma$ *derivace všech řádů a pro každé* $z_0 \in \operatorname{Int}\Gamma$ *a každé* $k \in \mathbb{N}$ *platí*

$$f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi \mathrm{i}} \int_\Gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}}\, \mathrm{d}z.$$

Důsledek (5 O holomorfnosti derivací Důsl. 20.5.1)

Je-li f *holomorfní v otevřené množině* $\Omega \subset \mathbb{C}$*, pak zde má derivace všech řádů a všechny jsou zde holomorfní. Navíc funkce* $u, v\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *reprezentující reálnou a imaginární složku funkce* f *jsou nekonečněkrát diferencovatelné v odpovídající množině a všechny jejich derivace jsou harmonické.*

Opakování II

Věta (17 Cauchyův vzorec V 20.5.1)

Nechť Γ je kladně orientovaná Jordanova po částech C^1-křivka v $\mathbb{C}$. Nechť $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je holomorfní na $\operatorname{Int}\Gamma$ a spojitá na $\overline{\operatorname{Int}\Gamma}$. Pak pro každé $z_0 \in \operatorname{Int}\Gamma$ platí

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\Gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, \mathrm{d}z.$$

Navíc f má v $\operatorname{Int}\Gamma$ derivace všech řádů a pro každé $z_0 \in \operatorname{Int}\Gamma$ a každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi \mathrm{i}} \int_\Gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}}\, \mathrm{d}z.$$

Důsledek (5 O holomorfnosti derivací Důsl. 20.5.1)

Je-li f holomorfní v otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{C}$, pak zde má derivace všech řádů a všechny jsou zde holomorfní. Navíc funkce $u, v\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ reprezentující reálnou a imaginární složku funkce f jsou nekonečněkrát diferencovatelné v odpovídající množině a všechny jejich derivace jsou harmonické.

Opakování III

Věta (19 O střední hodnotě V 20.5.3)

Nechť $r > 0$*,* $z_0 = z_1 + \mathrm{i}z_2 \in \mathbb{C}$ *a* $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *je holomorfní na* $B_r(z_0)$ *a spojitá na* $\overline{B_r(z_0)}$*. Pak*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi r} \int_{\psi} \widetilde{f} \,\mathrm{d}s,$$

kde pod křivkovým integrálem prvního druhu máme funkci $\widetilde{f}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ *definovanou předpisem* $\widetilde{f}(x, y) = f(x + \mathrm{i}y)$ *a* $\psi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ *je křivka definovaná předpisem*

$$\psi(t) = (z_1 + r\cos t, z_2 + r\sin t) \qquad \textit{pro } t \in [0, 2\pi].$$

Věta (19 Princip maxima modulu V 20.5.4)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ *je oblast a* $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *je holomorfní na* Ω*. Jestliže* f *na* Ω *nabývá svého maxima modulu (vzhledem k* Ω*), pak je konstantní na* Ω*.*

Opakování III

Věta (19 O střední hodnotě V 20.5.3)

Nechť $r > 0$, $z_0 = z_1 + \mathrm{i}z_2 \in \mathbb{C}$ a $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je holomorfní na $B_r(z_0)$ a spojitá na $\overline{B_r(z_0)}$. Pak

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi r} \int_\psi \widetilde{f}\,\mathrm{d}s,$$

kde pod křivkovým integrálem prvního druhu máme funkci $\widetilde{f}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ definovanou předpisem $\widetilde{f}(x, y) = f(x + \mathrm{i}y)$ a $\psi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ je křivka definovaná předpisem

$$\psi(t) = (z_1 + r\cos t, z_2 + r\sin t) \qquad \textit{pro } t \in [0, 2\pi].$$

Věta (19 Princip maxima modulu V 20.5.4)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je oblast a $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je holomorfní na Ω. Jestliže f na Ω nabývá svého maxima modulu (vzhledem k Ω), pak je konstantní na Ω.

Důsledek (6 Princip minima modulu Důsl. 20.5.7)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je oblast a $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je holomorfní na Ω a $f \neq 0$ na Ω. Jestliže f na Ω nabývá svého minima modulu (vzhledem k Ω), pak je konstantní na Ω.

Věta (20 Morerova věta V 20.5.9)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina a $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je spojitá na Ω a její křivkový integrál nezávisí na cestě v Ω. Pak f je holomorfní na Ω.

Věta (21 Cauchyovy nerovnosti V 20.5.12)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina, $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je holomorfní na Ω, $z_0 \in \Omega$ a $r > 0$ je dost malé, aby $\overline{B_r(z_0)} \subset \Omega$. Pak pro všechna $k \in \mathbb{N}$ platí

$$|f^{(k)}(z_0)| \leq \frac{k!}{r^k} \sup_{\langle C_r(z_0) \rangle} |f|.$$

Důsledek (6 Princip minima modulu Důsl. 20.5.7)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ *je oblast a* $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *je holomorfní na* Ω *a* $f \neq 0$ *na* Ω*. Jestliže* f *na* Ω *nabývá svého minima modulu (vzhledem k* Ω*), pak je konstantní na* Ω*.*

Věta (20 Morerova věta V 20.5.9)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ *je otevřená množina a* $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *je spojitá na* Ω *a její křivkový integrál nezávisí na cestě v* Ω*. Pak* f *je holomorfní na* Ω*.*

Věta (21 Cauchyovy nerovnosti V 20.5.12)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ *je otevřená množina,* $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *je holomorfní na* Ω*,* $z_0 \in \Omega$ *a* $r > 0$ *je dost malé, aby* $\overline{B_r(z_0)} \subset \Omega$*. Pak pro všechna* $k \in \mathbb{N}$ *platí*

$$|f^{(k)}(z_0)| \leq \frac{k!}{r^k} \sup_{\langle C_r(z_0) \rangle} |f|.$$

Důsledek (6 Princip minima modulu Důsl. 20.5.7)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je oblast a $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je holomorfní na Ω a $f \neq 0$ na Ω. Jestliže f na Ω nabývá svého minima modulu (vzhledem k Ω), pak je konstantní na Ω.

Věta (20 Morerova věta V 20.5.9)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina a $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je spojitá na Ω a její křivkový integrál nezávisí na cestě v Ω. Pak f je holomorfní na Ω.

Věta (21 Cauchyovy nerovnosti V 20.5.12)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina, $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je holomorfní na Ω, $z_0 \in \Omega$ a $r > 0$ je dost malé, aby $\overline{B_r(z_0)} \subset \Omega$. Pak pro všechna $k \in \mathbb{N}$ platí

$$|f^{(k)}(z_0)| \leq \frac{k!}{r^k} \sup_{\langle C_r(z_0) \rangle} |f|.$$

Věta (22 Liouvilleova věta V 20.5.13)

Nechť $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je holomorfní a omezená na $\mathbb{C}$. Pak je f na $\mathbb{C}$ konstantní.

Důsledek (7 Základní věty algebry (první verze) Důsl. 20.5.14)

Každý nekonstantní polynom s komplexními koeficienty má na $\mathbb{C}$ alespoň jeden kořen.

Důsledek (8 Základní věty algebry (druhá verze) Důsl. 20.5.15)

Každý nekonstantní polynom s komplexními koeficienty má na $\mathbb{C}$ počet kořenů (započítaných včetně násobnosti) rovný svému stupni.

19.6 Cauchyův vzorec a jeho aplikace II

Věta (22 Liouvilleova věta V 20.5.13)

Nechť $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je holomorfní a omezená na $\mathbb{C}$. Pak je f na $\mathbb{C}$ konstantní.

Důsledek (7 Základní věty algebry (první verze) Důsl. 20.5.14)

Každý nekonstantní polynom s komplexními koeficienty má na $\mathbb{C}$ alespoň jeden kořen.

Důsledek (8 Základní věty algebry (druhá verze) Důsl. 20.5.15)

Každý nekonstantní polynom s komplexními koeficienty má na $\mathbb{C}$ počet kořenů (započítaných včetně násobnosti) rovný svému stupni.

19.6 Cauchyův vzorec a jeho aplikace II

Věta (22 Liouvilleova věta V 20.5.13)

Nechť $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je holomorfní a omezená na $\mathbb{C}$. Pak je f na $\mathbb{C}$ konstantní.

Důsledek (7 Základní věty algebry (první verze) Důsl. 20.5.14)

Každý nekonstantní polynom s komplexními koeficienty má na $\mathbb{C}$ alespoň jeden kořen.

Důsledek (8 Základní věty algebry (druhá verze) Důsl. 20.5.15)

Každý nekonstantní polynom s komplexními koeficienty má na $\mathbb{C}$ počet kořenů (započítaných včetně násobnosti) rovný svému stupni.

19.7 Posloupnosti a řady holomorfních funkcí I

Věta (23 První Weierstrassova věta V 20.6.1)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina a $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost holomorfních funkcí na Ω, která konverguje lokálně stejnoměrně na Ω k funkci $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Pak je funkce f holomorfní na Ω a pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$f_n^{(k)} \overset{loc}{\rightrightarrows} f^{(k)} \qquad \text{na } \Omega.$$

Věta (24 Druhá Weierstrassova věta V 20.6.3)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je omezená oblast a $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost holomorfních funkcí na Ω, které jsou navíc spojité na $\overline{\Omega}$. Jestliže je posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ stejnoměrně konvergentní na $\partial\Omega$, pak je $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ také stejnoměrně konvergentní na Ω.

19.7 Posloupnosti a řady holomorfních funkcí I

Věta (23 První Weierstrassova věta V 20.6.1)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ *je otevřená množina a* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je posloupnost holomorfních funkcí na* Ω*, která konverguje lokálně stejnoměrně na* Ω *k funkci* $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$*. Pak je funkce* f *holomorfní na* Ω *a pro každé* $k \in \mathbb{N}$ *platí*

$$f_n^{(k)} \overset{loc}{\rightrightarrows} f^{(k)} \qquad \text{na } \Omega.$$

Věta (24 Druhá Weierstrassova věta V 20.6.3)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ *je omezená oblast a* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je posloupnost holomorfních funkcí na* Ω*, které jsou navíc spojité na* $\overline{\Omega}$*. Jestliže je posloupnost* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *stejnoměrně konvergentní na* $\partial\Omega$*, pak je* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *také stejnoměrně konvergentní na* Ω*.*

19.7 Posloupnosti a řady holomorfních funkcí II

Věta (25 O holomorfnosti integrálu závislého na parametru V 20.6.4)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ *je otevřená množina,* $[a, b] \subset \mathbb{R}$ *a* $F \colon \mathbb{C} \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *je funkce definovaná na* $\Omega \times [a, b]$*. Nechť navíc*

(i) *funkce* F *je spojitá na* $\Omega \times [a, b]$

(ii) *pro každé* $s \in [a, b]$ *je funkce* $z \mapsto F(z, s)$ *holomorfní v* Ω*.*

Pak funkce

$$f(z) := \int_a^b F(z, s)\,\mathrm{d}s$$

je holomorfní v Ω*.*

Věta (26 O Taylorově řadě příslušející holomorfní funkci V 20.7.1)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina, $z_0 \in \Omega$, $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je holomorfní na Ω a $R > 0$ je tak malé, že $B_R(z_0) \subset \Omega$. Pak existuje jednoznačně určená posloupnost komplexních koeficientů $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ taková, že

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \qquad \text{na } B_R(z_0).$$

Navíc pro každé $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a $r \in (0, R)$ platí

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{C_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \, \mathrm{d}z.$$

Věta (27 O jednoznačnosti V 20.7.2)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je oblast, $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je holomorfní na Ω a množina $\{z \in \Omega : f(z) = 0\}$ má alespoň jeden hromadný bod ležící v Ω. Pak $f \equiv 0$ na Ω.

Důsledek (9 Pozn. 20.7.3)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je oblast, f_1 a $f_2 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ jsou holomorfní na Ω, přičemž $f_1 = f_2$ na $M \subset \Omega$, kde M má alespoň jeden hromadný bod ležící v Ω. Pak $f_1 = f_2$ na Ω.

19.8 Taylorovy a Laurentovy řady II

Věta (27 O jednoznačnosti V 20.7.2)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ *je oblast,* $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *je holomorfní na* Ω *a množina* $\{z \in \Omega\colon f(z) = 0\}$ *má alespoň jeden hromadný bod ležící v* Ω*. Pak* $f \equiv 0$ *na* Ω*.*

Důsledek (9 Pozn. 20.7.3)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ *je oblast,* f_1 *a* $f_2\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *jsou holomorfní na* Ω*, přičemž* $f_1 = f_2$ *na* $M \subset \Omega$*, kde* M *má alespoň jeden hromadný bod ležící v* Ω*. Pak* $f_1 = f_2$ *na* Ω*.*