Sada příkladů 4/11

Funkce komplexní proměnné

Komplexní logaritmus, obecná mocnina

1. Najděte reálnou a imaginární část hodnoty následujících funkcí:
   a) $\ln(-1)$ b) $\ln \mathrm{i}$ c) $\ln(-2+3\mathrm{i})$.

2. Najděte všechny hodnoty následujících funkcí:
   a) $1^{\sqrt{2}}$ b) 2^{i} c) $(3+4\mathrm{i})^{1+\mathrm{i}}$.

   Počáteční hodnota $\arg f(z)$ resp. $\operatorname{Im} f(z)$ je pro $z = 2$ rovna 0. Bod z proběhne kružnici se středem v počátku a poloměru 2 v kladném směru, $\arg f(z)$ resp. $\operatorname{Im} f(z)$ závisí spojitě na z. S jakou hodnotou se vrátí $\arg f(z)$ resp. $\operatorname{Im} f(z)$ zpět do bodu $z = 2$?

3. $f(z) = \sqrt[3]{z-1}$

4. $f(z) = \sqrt{\frac{z-1}{z+1}}$

5. $f(z) = 2\ln z$

6. $f(z) = \ln z + \ln(z+1)$

   Spočtěte následující křivkové integrály:

7. $\displaystyle\int_\varphi \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{z}}$, φ je polokružnice $|z| = 1$, z bodu (1,0) do $(-1,0)$ přes horní polorovinu, $\sqrt{1} = 1$

8. $\displaystyle\int_\varphi \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{z}}$, φ je polokružnice $|z| = 1$, z bodu (1,0) do $(-1,0)$ přes horní polorovinu, $\sqrt{1} = -1$

9. $\displaystyle\int_\varphi \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{z}}$, φ je polokružnice $|z| = 1$, z bodu (1,0) do $(-1,0)$ přes dolní polorovinu, $\sqrt{1} = 1$

10. $\displaystyle\int_\varphi \ln z \,\mathrm{d}z$, φ je kružnice $|z| = 1$, $\ln 1 = 0$

11. $\displaystyle\int_{\varphi} \ln z \, \mathrm{d}z$, φ je kružnice $|z| = 1$, $\ln \mathrm{i} = \frac{\pi \mathrm{i}}{2}$

12. $\displaystyle\int_{\varphi} \ln z \, \mathrm{d}z$, φ je kružnice $|z| = R$, $\ln 1 = 2\pi \mathrm{i}$

13. Vypočtěte
    a) $\displaystyle\int_0^\infty x^{s-1} \cos x \, \mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int_0^\infty x^{s-1} \sin x \, \mathrm{d}x$
    v Newtonově smyslu, je-li $0 < s < 1$.

14. Následující funkce rozložte v okolí příslušného bodu do mocninné řady a určete poloměr konvergence
    a) $f(z) = \ln z$, $z_0 = 1$ b) $f(z) = \ln^2(1 - z)$, $z_0 = 0$