Početní část zkoušky 25.1.2023

Jméno:

Skupina:

1. (6b) Za předpokladu, že existuje

$$\min_{y \in M} \int_0^\pi (y')^2 \, \mathrm{d}x,$$

$$M = \left\{ u \in C^1([0,\pi]), u(0) = u(\pi) = 0, \int_0^\pi u^2 \, \mathrm{d}x = 1 \right\},$$

toto minimum nalezněte, včetně funkce (funkcí), ve kterých se nabývá.

Nápověda: Nejprve pomocí Lagrangeových multiplikátorů nalezněte všechny případné lokální extrémy (nezapomeňte použít vazbu) a nakonec vyberte takový lokální extrém, pro který je hodnota funkcionálu nejmenší.

2. (6b) Nalezněte bodovou limitu posloupnosti funkcí

$$f_n(x) = \frac{nx}{\sqrt{1 + n^2 x^2}}$$

na celém $\mathbb{R}$. Poté studujte stejnoměrnou resp. lokálně stejnoměrnou konvergenci na intervalech $[0, \infty)$ resp. $(0, \infty)$.

3. (8b) Pro které hodnoty a, $b \in [0, \infty)$ konverguje Lebesgueův integrál

$$\varphi(a, b) = \int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg}(ax)}{x(1 + b^2 x^2)} \, \mathrm{d}x?$$

Pro tyto hodnoty integrál spočtěte pomocí derivace integrálu závislého na parametru. Nezapomeňte zkontrolovat splnění předpokladů odpovídajících vět.

Nápověda: Pozor na situaci $a = b$.

4. (7b) Spočtěte tok pole $\mathbf{F} = (x, y, 1)$ přes plochu M zadanou

$$M: \quad z = x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}, \qquad x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} \leq 1$$

orientovanou tak, že normála $\mathbf{n}$ má z-tovou souřadnici kladnou.

Nápověda: Tok pole $\mathbf{F}$ plochou M je dán $\int_M \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}S$.

Teoretická část zkoušky 25.1.2023

Jméno:

Skupina:

1. (8b) (a) Definujte pojem jednoduchá nezáporná měřitelná funkce.
(b) Definujte Lebesgueův integrál pro (i) jednoduchou nezápornou měřitelnou funkci (ii) nezápornou měřitelnou funkci (iii) měřitelnou funkci.
(c) Formulujte větu o aproximaci nezáporných měřitelných funkcí pomocí jednoduchých nezáporných měřitelných funkcí.
(d) Formulujte Léviho větu pro případ nezáporných funkcí.
(e) Nechť funkce f, $g \in \mathcal{L}(\mu, \Omega)$, α, $\beta \in \mathbb{R}$. Použitím bodu (d) a dalších vlastností integrálu dokažte, že
$$\int_\Omega (\alpha f + \beta g)\,\mathrm{d}\mu = \alpha \int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu + \beta \int_\Omega g\,\mathrm{d}\mu.$$

2. (7b) (a) Definujte prostor funkcí $L^p(\Omega)$, $1 \le p \le \infty$.
(b) Zformulujte a dokažte Hölderovu nerovnost.
(c) Ukažte, jak z ní plyne Minkowského nerovnost.
(d) Ukažte, jak z těchto nerovností plyne, že $L^p(\Omega)$, $1 \le p \le \infty$ je normovaný prostor.

3. (8b) (a) Formulujte a dokažte Riemann–Lebesgueovo lemma.
(b) Formulujte a dokažte větu o konvergenci číselných řad tvořených Fourierovými koeficienty funkce vůči trigonometrickému systému.
(c) Formulujte alespoň dvě věty o bodové a stejnoměrné konvergenci trigonometrických řad.