Matematika pro fyziky I

Milan Pokorný

Přednáška 20.12.2022

Definice (1 Ortogonální systém, ortonormální systém, úplný systém D 19.1.1)

Nechť H je Hilbertův prostor a $\{\Phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ je systém jeho prvků. Řekneme, že $\{\Phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ je *ortogonální systém*, jestliže obsahuje pouze netriviální prvky a platí

$$(\Phi_m, \Phi_n)_H = 0 \qquad \text{kdykoliv } m \neq n.$$

Řekneme, že $\{\Phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ je *ortonormální systém*, jestliže je ortogonální a navíc

$$\|\Phi_n\|_H = 1 \qquad \text{pro všechna } n \in \mathbb{N}.$$

Řekneme, že $\{\Phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ je *úplný systém*, jestliže pro každé $\Phi \in H$ platí

$$(\Phi, \Phi_n)_H = 0 \quad \text{pro všechna } n \in \mathbb{N} \qquad \Longrightarrow \qquad \Phi = 0.$$

Definice (2 Váhový prostor L^2_ϱ D 19.1.3)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená množina a $\varrho \in C(\Omega)$ je kladná na Ω. Pak definujeme *váhový prostor* $L^2_\varrho(\Omega)$ jako množinu tříd ekvivalence (vzhledem k rovnosti skoro všude) na množině

$$\left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} : f \text{ je měřitelná a } \int_\Omega f^2 \varrho \, \mathrm{d}x < \infty \right\}.$$

Dále zde definujeme

$$(f, g)_{L^2_\varrho(\Omega)} := \int_\Omega fg \varrho \, \mathrm{d}x.$$

Věta (1 O váhovém prostoru L^2_ϱ V 19.1.6)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená množina a $\varrho \in C(\Omega)$ je kladná na Ω. Pak $L^2_\varrho(\Omega)$ je separabilní Hilbertův prostor, v němž jsou husté funkce z $\mathcal{D}(\Omega)$.

18.2 Úplné ortogonální systémy II

Definice (2 Váhový prostor L^2_ϱ D 19.1.3)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená množina a $\varrho \in C(\Omega)$ je kladná na Ω. Pak definujeme *váhový prostor* $L^2_\varrho(\Omega)$ jako množinu tříd ekvivalence (vzhledem k rovnosti skoro všude) na množině

$$\left\{f : \Omega \to \mathbb{R} : f \text{ je měřitelná a } \int_\Omega f^2 \varrho \,\mathrm{d}x < \infty\right\}.$$

Dále zde definujeme

$$(f, g)_{L^2_\varrho(\Omega)} := \int_\Omega fg\varrho \,\mathrm{d}x.$$

Věta (1 O váhovém prostoru L^2_ϱ V 19.1.6)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená množina a $\varrho \in C(\Omega)$ je kladná na Ω. Pak $L^2_\varrho(\Omega)$ je separabilní Hilbertův prostor, v němž jsou husté funkce z $\mathcal{D}(\Omega)$.

18.2 Úplné ortogonální systémy III

Definice (3 Adjungovaný operátor D 19.1.7)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená množina. Nechť $A, B \colon L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ jsou lineární operátory s definičními obory $D(A)$, $D(B) \subset L^2(\Omega)$, přičemž oba definiční obory jsou husté v $L^2(\Omega)$. Jestliže

$$(A(y), z)_2 = (y, B(z))_2 \qquad \text{pro všechna } y \in D(A), z \in D(B),$$

řekneme, že operátor B je *adjungovaný* (nebo *sdružený*) k operátoru A a značíme jej A^*. Řekneme, že operátor A je *samoadjungovaný* (nebo *samosdružený*), jestliže $A = A^*$ (včetně rovnosti definičních oborů).

Definice (4 Symetrický operátor D 19.1.8)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená množina. Nechť $A \colon L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ je lineární operátor s definičním oborem $D(A) \subset L^2(\Omega)$, který je v $L^2(\Omega)$ hustý. Jestliže

$$(A(y), z)_2 = (y, A(z))_2 \qquad \text{pro všechna } y, z \in D(A),$$

řekneme, že operátor A je *symetrický*.

18.2 Úplné ortogonální systémy III

Definice (3 Adjungovaný operátor D 19.1.7)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená množina. Nechť $A, B \colon L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ jsou lineární operátory s definičními obory $D(A)$, $D(B) \subset L^2(\Omega)$, přičemž oba definiční obory jsou husté v $L^2(\Omega)$. Jestliže

$$(A(y), z)_2 = (y, B(z))_2 \qquad \text{pro všechna } y \in D(A), z \in D(B),$$

řekneme, že operátor B je *adjungovaný* (nebo *sdružený*) k operátoru A a značíme jej A^*. Řekneme, že operátor A je *samoadjungovaný* (nebo *samosdružený*), jestliže $A = A^*$ (včetně rovnosti definičních oborů).

Definice (4 Symetrický operátor D 19.1.8)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená množina. Nechť $A \colon L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ je lineární operátor s definičním oborem $D(A) \subset L^2(\Omega)$, který je v $L^2(\Omega)$ hustý. Jestliže

$$(A(y), z)_2 = (y, A(z))_2 \qquad \text{pro všechna } y, z \in D(A),$$

řekneme, že operátor A je *symetrický*.

Definice (5 Vlastní číslo a vlastní funkce D 19.1.11)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená množina, $\varrho \in C(\Omega)$ je kladná funkce, A je lineární operátor z $D(A) \subset L^2_\varrho(\Omega)$ do $L^2_\varrho(\Omega)$, $y \in D(A)$ je netriviální funkce a $\lambda \in \mathbb{R}$. Jestliže platí

$$A(y) = \lambda \varrho y,$$

pak se číslo λ nazývá *vlastní číslo* s vahou ϱ operátoru A a funkce y se nazývá *vlastní funkce* příslušející vlastnímu číslu λ.

Věta (2 O vlastních číslech a vlastních funkcích symetrického operátoru V 19.1.12)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená množina, $\varrho \in C(\Omega)$ je kladná funkce a A je lineární operátor z $D(A) \subset L^2_\varrho(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ do $L^2_\varrho(\Omega) \cap L^2(\Omega)$, který je navíc symetrický. Pak vlastní funkce odpovídající různým vlastním číslům jsou vzájemně ortogonální v $L^2_\varrho(\Omega)$.

Definice (5 Vlastní číslo a vlastní funkce D 19.1.11)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená množina, $\varrho \in C(\Omega)$ je kladná funkce, A je lineární operátor z $D(A) \subset L^2_\varrho(\Omega)$ do $L^2_\varrho(\Omega)$, $y \in D(A)$ je netriviální funkce a $\lambda \in \mathbb{R}$. Jestliže platí

$$A(y) = \lambda \varrho y,$$

pak se číslo λ nazývá *vlastní číslo* s vahou ϱ operátoru A a funkce y se nazývá *vlastní funkce* příslušející vlastnímu číslu λ.

Věta (2 O vlastních číslech a vlastních funkcích symetrického operátoru V 19.1.12)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená množina, $\varrho \in C(\Omega)$ je kladná funkce a A je lineární operátor z $D(A) \subset L^2_\varrho(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ do $L^2_\varrho(\Omega) \cap L^2(\Omega)$, který je navíc symetrický. Pak vlastní funkce odpovídající různým vlastním číslům jsou vzájemně ortogonální v $L^2_\varrho(\Omega)$.