Matematika pro fyziky I

Milan Pokorný

Přednáška 1.11.2022

Opakování I

Definice (13 Jednoduchá funkce D 15.5.1)

Nechť X je množina a $s\colon X \mapsto \mathbb{R}^*$. Řekneme, že s je *jednoduchá* funkce, jestliže $s(X)$ je konečná množina.

Definice (14 Integrál z jednoduché nezáporné funkce)

Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ je měřitelný prostor, $\Omega \subset X$ je měřitelná a $s = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{A_j}$ je nezáporná měřitelná jednoduchá funkce. Pak definujeme

$$\int_\Omega s \, \mathrm{d}\mu := \sum_{j=1}^{n} a_j \mu(A_j \cap \Omega).$$

Opakování I

Definice (13 Jednoduchá funkce D 15.5.1)

Nechť X je množina a $s\colon X \mapsto \mathbb{R}^*$. Řekneme, že s je *jednoduchá* funkce, jestliže $s(X)$ je konečná množina.

Definice (14 Integrál z jednoduché nezáporné funkce)

Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ je měřitelný prostor, $\Omega \subset X$ je měřitelná a $s = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{A_j}$ je nezáporná měřitelná jednoduchá funkce. Pak definujeme

$$\int_\Omega s \,\mathrm{d}\mu := \sum_{j=1}^{n} a_j \mu(A_j \cap \Omega).$$

Opakování II

Lemma (1)

Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *je měřitelný prostor,* $\Omega \subset X$ *je měřitelná a* $s = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{A_j} = \sum_{k=1}^{m} b_j \chi_{B_j}$ *je nezáporná jednoduchá měřitelná funkce. Potom* $\int_\Omega s \, \mathrm{d}\mu$ *nezávisí na tvaru rozkladu* s*.*

Lemma (2)

Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *je měřitelný prostor,* $\Omega \subset X$ *je měřitelná a* s *je JNMF. Potom*
(i) $\int_\Omega s \, \mathrm{d}\mu \geq 0$
(ii) $\int_\Omega s \, \mathrm{d}\mu = 0$ *právě tehdy, když* $s = 0$ *s.v. na* Ω
(iii) $\int_\Omega s \, \mathrm{d}\mu$ *nezávisí na chování* s *na* $X \setminus \Omega$ *a na množinách míry nula*
(iv) *je-li* $\int_\Omega s \, \mathrm{d}\mu < \infty$*, potom* $\mu(\{x \in \Omega : s(x) = \infty\}) = 0$.

Lemma (3)

Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *je měřitelný prostor,* $\Omega \subset X$ *je měřitelná a* s_1, s_2 *jsou JNMF. Potom*
(i) *je-li* $s_1 = s_2$ *s.v. na* Ω*, je* $\int_\Omega s_1 \, \mathrm{d}\mu = \int_\Omega s_2 \, \mathrm{d}\mu$
(ii) *je-li* $s_1 \leq s_2$ *s.v. na* Ω*, je* $\int_\Omega s_1 \, \mathrm{d}\mu \leq \int_\Omega s_2 \, \mathrm{d}\mu$.

Opakování II

Lemma (1)

Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *je měřitelný prostor,* $\Omega \subset X$ *je měřitelná a* $s = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{A_j} = \sum_{k=1}^{m} b_j \chi_{B_j}$ *je nezáporná jednoduchá měřitelná funkce. Potom* $\int_\Omega s \, \mathrm{d}\mu$ *nezávisí na tvaru rozkladu* s.

Lemma (2)

Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *je měřitelný prostor,* $\Omega \subset X$ *je měřitelná a* s *je JNMF. Potom*
(i) $\int_\Omega s \, \mathrm{d}\mu \geq 0$
(ii) $\int_\Omega s \, \mathrm{d}\mu = 0$ *právě tehdy, když* $s = 0$ *s.v. na* Ω
(iii) $\int_\Omega s \, \mathrm{d}\mu$ *nezávisí na chování* s *na* $X \setminus \Omega$ *a na množinách míry nula*
(iv) *je-li* $\int_\Omega s \, \mathrm{d}\mu < \infty$, *potom* $\mu(\{x \in \Omega : s(x) = \infty\}) = 0$.

Lemma (3)

Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *je měřitelný prostor,* $\Omega \subset X$ *je měřitelná a* s_1, s_2 *jsou JNMF. Potom*
(i) *je-li* $s_1 = s_2$ *s.v. na* Ω, *je* $\int_\Omega s_1 \, \mathrm{d}\mu = \int_\Omega s_2 \, \mathrm{d}\mu$
(ii) *je-li* $s_1 \leq s_2$ *s.v. na* Ω, *je* $\int_\Omega s_1 \, \mathrm{d}\mu \leq \int_\Omega s_2 \, \mathrm{d}\mu$.

Opakování II

Lemma (1)

Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *je měřitelný prostor,* $\Omega \subset X$ *je měřitelná a* $s = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{A_j} = \sum_{k=1}^{m} b_j \chi_{B_j}$ *je nezáporná jednoduchá měřitelná funkce. Potom* $\int_\Omega s \,\mathrm{d}\mu$ *nezávisí na tvaru rozkladu* s*.*

Lemma (2)

Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *je měřitelný prostor,* $\Omega \subset X$ *je měřitelná a* s *je JNMF. Potom*
(i) $\int_\Omega s \,\mathrm{d}\mu \geq 0$
(ii) $\int_\Omega s \,\mathrm{d}\mu = 0$ *právě tehdy, když* $s = 0$ *s.v. na* Ω
(iii) $\int_\Omega s \,\mathrm{d}\mu$ *nezávisí na chování* s *na* $X \setminus \Omega$ *a na množinách míry nula*
(iv) *je-li* $\int_\Omega s \,\mathrm{d}\mu < \infty$*, potom* $\mu(\{x \in \Omega : s(x) = \infty\}) = 0$*.*

Lemma (3)

Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *je měřitelný prostor,* $\Omega \subset X$ *je měřitelná a* s_1*,* s_2 *jsou JNMF. Potom*
(i) *je-li* $s_1 = s_2$ *s.v. na* Ω*, je* $\int_\Omega s_1 \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega s_2 \,\mathrm{d}\mu$
(ii) *je-li* $s_1 \leq s_2$ *s.v. na* Ω*, je* $\int_\Omega s_1 \,\mathrm{d}\mu \leq \int_\Omega s_2 \,\mathrm{d}\mu$*.*

14.6 Integrál z jednoduché nezáporné funkce I

Lemma (4)

Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *je měřitelný prostor,* $\Omega \subset X$ *je měřitelná a* s_1, s_2 *jsou JNMF a* $c \geq 0$. *Potom*
(i) $\int_\Omega (s_1 + s_2)\,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega s_1\,\mathrm{d}\mu + \int_\Omega s_2\,\mathrm{d}\mu$
(ii) $\int_\Omega c s_1\,\mathrm{d}\mu = c \int_\Omega s_1\,\mathrm{d}\mu$.

Lemma (5)

Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *je měřitelný prostor,* $\Omega \subset X$ *je měřitelná a* s *je JNMF. Nechť* $P \in \mathcal{M}$, $P \subset \Omega$. *Potom*

$$\int_P s\,\mathrm{d}\mu \leq \int_\Omega s\,\mathrm{d}\mu.$$

Lemma (6)

Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *je měřitelný prostor a* s *je JNMF. Potom množinová funkce*

$$\varphi(A) := \int_A s\,\mathrm{d}\mu, \qquad A \subset X,\ A \in \mathcal{M}$$

je míra na σ*-algebře* $\mathcal{M}$.

Lemma (4)

Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *je měřitelný prostor,* $\Omega \subset X$ *je měřitelná a* s_1, s_2 *jsou JNMF a* $c \geq 0$. *Potom*
(i) $\int_\Omega (s_1 + s_2)\,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega s_1\,\mathrm{d}\mu + \int_\Omega s_2\,\mathrm{d}\mu$
(ii) $\int_\Omega cs_1\,\mathrm{d}\mu = c\int_\Omega s_1\,\mathrm{d}\mu$.

Lemma (5)

Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *je měřitelný prostor,* $\Omega \subset X$ *je měřitelná a* s *je JNMF. Nechť* $P \in \mathcal{M}$, $P \subset \Omega$. *Potom*

$$\int_P s\,\mathrm{d}\mu \leq \int_\Omega s\,\mathrm{d}\mu.$$

Lemma (6)

Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *je měřitelný prostor a* s *je JNMF. Potom množinová funkce*

$$\varphi(A) := \int_A s\,\mathrm{d}\mu, \qquad A \subset X,\ A \in \mathcal{M}$$

je míra na σ*-algebře* $\mathcal{M}$.

14.6 Integrál z jednoduché nezáporné funkce I

Lemma (4)

Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *je měřitelný prostor,* $\Omega \subset X$ *je měřitelná a* s_1, s_2 *jsou JNMF a* $c \geq 0$*. Potom*
(i) $\int_\Omega (s_1 + s_2)\,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega s_1\,\mathrm{d}\mu + \int_\Omega s_2\,\mathrm{d}\mu$
(ii) $\int_\Omega c s_1\,\mathrm{d}\mu = c\int_\Omega s_1\,\mathrm{d}\mu.$

Lemma (5)

Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *je měřitelný prostor,* $\Omega \subset X$ *je měřitelná a* s *je JNMF. Nechť* $P \in \mathcal{M}$, $P \subset \Omega$*. Potom*

$$\int_P s\,\mathrm{d}\mu \leq \int_\Omega s\,\mathrm{d}\mu.$$

Lemma (6)

Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *je měřitelný prostor a* s *je JNMF. Potom množinová funkce*

$$\varphi(A) := \int_A s\,\mathrm{d}\mu, \qquad A \subset X,\ A \in \mathcal{M}$$

je míra na σ*-algebře* $\mathcal{M}$*.*

14.7 Obecná definice integrálu I

Definice (15 Integrál z měřitelné funkce D 15.7.1 a D 15.8.1)

Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ je měřitelný prostor, $\Omega \subset X$ je měřitelná. Pro $f\colon X \to [0, \infty]$ měřitelnou definujeme

$$\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu := \sup\Big\{\int_\Omega s \,\mathrm{d}\mu \colon s \text{ je měřitelná jednoduchá funkce splňující } 0 \leq s \leq f\Big\}.$$

Je-li f je měřitelná numerická funkce, pak definujeme (připomeňme $f^+ := \max\{f, 0\}$, $f^- := \max\{-f, 0\}$)

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu := \int_X f^+ \,\mathrm{d}\mu - \int_X f^- \,\mathrm{d}\mu,$$

má-li pravá strana smysl v $\mathbb{R}^*$ (tedy je-li alespoň jeden z integrálů napravo konečný).
Číslo $\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu$ se nazývá *abstraktní Lebesgueův integrál* z funkce f podle míry μ přes množinu Ω.

Definice (16 Funkce mající (konečný) integrál D 15.8.1)

Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ je měřitelný prostor, $\Omega \subset X$ je měřitelná. Prostor všech funkcí na X, pro které má $\int_X f \,\mathrm{d}\mu$ smysl, značíme $\mathcal{L}^*(\mu; \Omega)$. Pokud je navíc integrál konečný, říkáme, že funkce f je *μ-integrovatelná* (v případě Lebesgueovy míry používáme termín *lebesgueovsky integrovatelná*) a píšeme $f \in \mathcal{L}(\mu; \Omega)$.

14.7 Obecná definice integrálu I

Definice (15 Integrál z měřitelné funkce D 15.7.1 a D 15.8.1)

Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ je měřitelný prostor, $\Omega \subset X$ je měřitelná. Pro $f\colon X \to [0, \infty]$ měřitelnou definujeme

$$\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu := \sup\Big\{\int_\Omega s \,\mathrm{d}\mu \colon s \text{ je měřitelná jednoduchá funkce splňující } 0 \le s \le f\Big\}.$$

Je-li f je měřitelná numerická funkce, pak definujeme (připomeňme $f^+ := \max\{f, 0\}$, $f^- := \max\{-f, 0\}$)

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu := \int_X f^+ \,\mathrm{d}\mu - \int_X f^- \,\mathrm{d}\mu,$$

má-li pravá strana smysl v $\mathbb{R}^*$ (tedy je-li alespoň jeden z integrálů napravo konečný).
Číslo $\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu$ se nazývá *abstraktní Lebesgueův integrál* z funkce f podle míry μ přes množinu Ω.

Definice (16 Funkce mající (konečný) integrál D 15.8.1)

Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ je měřitelný prostor, $\Omega \subset X$ je měřitelná. Prostor všech funkcí na X, pro které má $\int_X f \,\mathrm{d}\mu$ smysl, značíme $\mathcal{L}^*(\mu; \Omega)$. Pokud je navíc integrál konečný, říkáme, že funkce f je μ-*integrovatelná* (v případě Lebesgueovy míry používáme termín *lebesgueovsky integrovatelná*) a píšeme $f \in \mathcal{L}(\mu; \Omega)$.

Definice (17 Integrál z komplexní funkce Pozn. 15.8.7)

Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ je měřitelný prostor, $\Omega \subset X$ je měřitelná. Nechť $\operatorname{Re} f$ i $\operatorname{Im} f \in \mathcal{L}(\mu; \Omega)$. Potom

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu = \int_X \operatorname{Re} f \, \mathrm{d}\mu + \mathrm{i} \int_X \operatorname{Im} f \, \mathrm{d}\mu.$$

Lemma (7 T 15.7.3 (iv))

Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ je měřitelný prostor, $\Omega \subset X$ je měřitelná. Nechť f_1 i f_2 jsou nezáporné měřitelné funkce na Ω. Jestliže $f_1 \leq f_2$ s.v. na Ω, pak

$$\int_\Omega f_1 \, \mathrm{d}\mu \leq \int_\Omega f_2 \, \mathrm{d}\mu.$$

14.7 Obecná definice integrálu II

Definice (17 Integrál z komplexní funkce Pozn. 15.8.7)

Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ je měřitelný prostor, $\Omega \subset X$ je měřitelná. Nechť $\operatorname{Re} f$ i $\operatorname{Im} f \in \mathcal{L}(\mu; \Omega)$. Potom

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu = \int_X \operatorname{Re} f \, \mathrm{d}\mu + \mathrm{i} \int_X \operatorname{Im} f \, \mathrm{d}\mu.$$

Lemma (7 T 15.7.3 (iv))

Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ je měřitelný prostor, $\Omega \subset X$ je měřitelná. Nechť f_1 i f_2 jsou nezáporné měřitelné funkce na Ω. Jestliže $f_1 \leq f_2$ s.v. na Ω, pak

$$\int_\Omega f_1 \, \mathrm{d}\mu \leq \int_\Omega f_2 \, \mathrm{d}\mu.$$

14.7 Obecná definice integrálu III

Věta (22 Integrál z ekvivalentních funkcí)

Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *je měřitelný prostor,* $\Omega \subset X$ *je měřitelná. Nechť* $f_1 = f_2$ *s.v. na* Ω*. Potom buď obě funkce integrál mají, nebo ho nemají. Pokud integrál existuje, platí*

$$\int_\Omega f_1 \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega f_2 \,\mathrm{d}\mu.$$

Věta (23 Charakterizace funkce s konečným integrálem V 15.8.8 (ii))

Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *je měřitelný prostor,* $\Omega \subset X$ *je měřitelná. Je-li* f *měřitelná, pak*

$$f \in \mathcal{L}(\mu) \iff f^+, f^- \in \mathcal{L}(\mu).$$

Věta (24 Funkce s konečným integrálem je konečná s.v. V 15.8.8 (iv))

Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *je měřitelný prostor,* $\Omega \subset X$ *je měřitelná. Je-li* $f \in \mathcal{L}(\mu)$*, pak je konečná* (μ) *s.v. na* Ω*.*

14.7 Obecná definice integrálu III

Věta (22 Integrál z ekvivalentních funkcí)

Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *je měřitelný prostor,* $\Omega \subset X$ *je měřitelná. Nechť* $f_1 = f_2$ *s.v. na* Ω*. Potom buď obě funkce integrál mají, nebo ho nemají. Pokud integrál existuje, platí*

$$\int_\Omega f_1 \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega f_2 \,\mathrm{d}\mu.$$

Věta (23 Charakterizace funkce s konečným integrálem V 15.8.8 (ii))

Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *je měřitelný prostor,* $\Omega \subset X$ *je měřitelná. Je-li* f *měřitelná, pak*

$$f \in \mathcal{L}(\mu) \quad \Longleftrightarrow \quad f^+, f^- \in \mathcal{L}(\mu).$$

Věta (24 Funkce s konečným integrálem je konečná s.v. V 15.8.8 (iv))

Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *je měřitelný prostor,* $\Omega \subset X$ *je měřitelná. Je-li* $f \in \mathcal{L}(\mu)$*, pak je konečná* (μ) *s.v. na* Ω*.*

14.7 Obecná definice integrálu III

Věta (22 Integrál z ekvivalentních funkcí)

Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ je měřitelný prostor, $\Omega \subset X$ je měřitelná. Nechť $f_1 = f_2$ s.v. na Ω. Potom buď obě funkce integrál mají, nebo ho nemají. Pokud integrál existuje, platí

$$\int_\Omega f_1 \, \mathrm{d}\mu = \int_\Omega f_2 \, \mathrm{d}\mu.$$

Věta (23 Charakterizace funkce s konečným integrálem V 15.8.8 (ii))

Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ je měřitelný prostor, $\Omega \subset X$ je měřitelná. Je-li f měřitelná, pak

$$f \in \mathcal{L}(\mu) \quad \Longleftrightarrow \quad f^+, f^- \in \mathcal{L}(\mu).$$

Věta (24 Funkce s konečným integrálem je konečná s.v. V 15.8.8 (iv))

Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ je měřitelný prostor, $\Omega \subset X$ je měřitelná. Je-li $f \in \mathcal{L}(\mu)$, pak je konečná (μ) s.v. na Ω.

Věta (25 O vztahu nulovosti integrálu a nulovosti funkce V 15.8.15)

Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ je měřitelný prostor a $f \in \mathcal{L}(\mu)$.
(i) *Je-li f nezáporná a $\int_X f \, \mathrm{d}\mu = 0$, pak $f = 0$ skoro všude.*
(ii) *Jestliže $\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu = 0$ pro každou měřitelnou množinu $\Omega \subset X$, pak $f = 0$ skoro všude.*

Věta (26 Omezená funkce má integrál přes množinu s konečnou mírou)

Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ je měřitelný prostor a f je omezená měřitelná na měřitelné množině Ω takové, že $\mu(\Omega) < +\infty$. Potom $f \in \mathcal{L}(\mu)$.

Důsledek (5)

Je-li f spojitá na omezené uzavřené množině $K \subset \mathbb{R}^N$, potom je $f \in \mathcal{L}(\lambda^N; K)$.

14.7 Obecná definice integrálu IV

Věta (25 O vztahu nulovosti integrálu a nulovosti funkce V 15.8.15)

Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *je měřitelný prostor a* $f \in \mathcal{L}(\mu)$.
(i) *Je-li* f *nezáporná a* $\int_X f \,\mathrm{d}\mu = 0$*, pak* $f = 0$ *skoro všude.*
(ii) *Jestliže* $\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu = 0$ *pro každou měřitelnou množinu* $\Omega \subset X$*, pak* $f = 0$ *skoro všude.*

Věta (26 Omezená funkce má integrál přes množinu s konečnou mírou)

Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *je měřitelný prostor a* f *je omezená měřitelná na měřitelné množině* Ω *takové, že* $\mu(\Omega) < +\infty$*. Potom* $f \in \mathcal{L}(\mu)$.

Důsledek (5)

Je-li f *spojitá na omezené uzavřené množině* $K \subset \mathbb{R}^N$*, potom je* $f \in \mathcal{L}(\lambda^N; K)$.

Věta (25 O vztahu nulovosti integrálu a nulovosti funkce V 15.8.15)

Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *je měřitelný prostor a* $f \in \mathcal{L}(\mu)$.
(i) *Je-li* f *nezáporná a* $\int_X f \,\mathrm{d}\mu = 0$, *pak* $f = 0$ *skoro všude.*
(ii) *Jestliže* $\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu = 0$ *pro každou měřitelnou množinu* $\Omega \subset X$, *pak* $f = 0$ *skoro všude.*

Věta (26 Omezená funkce má integrál přes množinu s konečnou mírou)

Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *je měřitelný prostor a* f *je omezená měřitelná na měřitelné množině* Ω *takové, že* $\mu(\Omega) < +\infty$. *Potom* $f \in \mathcal{L}(\mu)$.

Důsledek (5)

Je-li f *spojitá na omezené uzavřené množině* $K \subset \mathbb{R}^N$, *potom je* $f \in \mathcal{L}(\lambda^N; K)$.

Věta (27 Nerovnosti mezi funkcemi a integrály)

Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ je měřitelný prostor, f a g jsou měřitelné na měřitelné množině Ω. Nechť $f \leq g$ s.v. na Ω. Je-li $g \in \mathcal{L}^*(\mu)$ a $\int_\Omega g \, \mathrm{d}\mu < +\infty$, je také $f \in \mathcal{L}^*(\mu)$. Je-li $f \in \mathcal{L}^*(\mu)$ a $\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu > -\infty$, je také $g \in \mathcal{L}^*(\mu)$. Jsou-li f, $g \in \mathcal{L}^*(\mu)$, pak

$$\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu \leq \int_\Omega g \, \mathrm{d}\mu.$$

Důsledek (6)

Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ je měřitelný prostor, g, $h \in \mathcal{L}(\mu; \Omega)$ a f je měřitelná na měřitelné množině Ω. Nechť $g \leq f \leq h$ s.v. na Ω. Potom $f \in \mathcal{L}(\mu; \Omega)$

$$\int_\Omega g \, \mathrm{d}\mu \leq \int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu \leq \int_\Omega h \, \mathrm{d}\mu.$$

Speciálně, je-li $a \leq f \leq b$ s.v. na Ω a $\mu(\Omega) < +\infty$, a, $b \in \mathbb{R}$, pak $f \in \mathcal{L}(\mu; \Omega)$ a

$$a\mu(\Omega) \leq \int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu \leq b\mu(\Omega).$$

14.7 Obecná definice integrálu V

Věta (27 Nerovnosti mezi funkcemi a integrály)

Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *je měřitelný prostor,* f *a* g *jsou měřitelné na měřitelné množině* Ω*. Nechť* $f \leq g$ *s.v. na* Ω*. Je-li* $g \in \mathcal{L}^*(\mu)$ *a* $\int_\Omega g \,\mathrm{d}\mu < +\infty$*, je také* $f \in \mathcal{L}^*(\mu)$*. Je-li* $f \in \mathcal{L}^*(\mu)$ *a* $\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu > -\infty$*, je také* $g \in \mathcal{L}^*(\mu)$*. Jsou-li* f*,* $g \in \mathcal{L}^*(\mu)$*, pak*

$$\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu \leq \int_\Omega g \,\mathrm{d}\mu.$$

Důsledek (6)

Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *je měřitelný prostor,* g*,* $h \in \mathcal{L}(\mu; \Omega)$ *a* f *je měřitelná na měřitelné množině* Ω*. Nechť* $g \leq f \leq h$ *s.v. na* Ω*. Potom* $f \in \mathcal{L}(\mu; \Omega)$

$$\int_\Omega g \,\mathrm{d}\mu \leq \int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu \leq \int_\Omega h \,\mathrm{d}\mu.$$

Speciálně, je-li $a \leq f \leq b$ *s.v. na* Ω *a* $\mu(\Omega) < +\infty$*,* a*,* $b \in \mathbb{R}$*, pak* $f \in \mathcal{L}(\mu; \Omega)$ *a*

$$a\mu(\Omega) \leq \int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu \leq b\mu(\Omega).$$

14.7 Obecná definice integrálu VI

Věta (28 Odhad integrálu)

Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *je měřitelný prostor,* Ω *je měřitelná a* $f\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ *patří do* $\mathcal{L}^*(\mu)$*. Potom též* $|f| \in \mathcal{L}^*(\mu)$ *(speciálně,* $|f|$ *je měřitelná) a platí*

$$\left| \int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu \right| \leq \int_\Omega |f| \, \mathrm{d}\mu.$$

Věta (29 Absolutní konvergence Lebesgueova integrálu V 15.8.8 (ii))

Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *je měřitelný prostor a* f *je měřitelná na měřitelné množině* Ω*. Potom*

$$f \in \mathcal{L}(\mu) \iff |f| \in \mathcal{L}(\mu).$$

Věta (30 Odhad integrálu II)

Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *je měřitelný prostor,* Ω *je měřitelná,* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *patří do* $\mathcal{L}^*(\mu)$ *a* $g \in \mathcal{L}(\mu)$*. Nechť* $|f| \leq g$ *s.v. na* Ω*. Potom je* $f \in \mathcal{L}(\mu)$ *a platí*

$$\left| \int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu \right| \leq \int_\Omega g \, \mathrm{d}\mu.$$

14.7 Obecná definice integrálu VI

Věta (28 Odhad integrálu)

Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *je měřitelný prostor,* Ω *je měřitelná a* $f\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ *patří do* $\mathcal{L}^*(\mu)$. *Potom též* $|f| \in \mathcal{L}^*(\mu)$ *(speciálně,* $|f|$ *je měřitelná) a platí*

$$\left| \int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu \right| \le \int_\Omega |f| \, \mathrm{d}\mu.$$

Věta (29 Absolutní konvergence Lebesgueova integrálu V 15.8.8 (ii))

Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *je měřitelný prostor a* f *je měřitelná na měřitelné množině* Ω. *Potom*

$$f \in \mathcal{L}(\mu) \quad \Longleftrightarrow \quad |f| \in \mathcal{L}(\mu).$$

Věta (30 Odhad integrálu II)

Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *je měřitelný prostor,* Ω *je měřitelná,* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *patří do* $\mathcal{L}^*(\mu)$ *a* $g \in \mathcal{L}(\mu)$. *Nechť* $|f| \le g$ *s.v. na* Ω. *Potom je* $f \in \mathcal{L}(\mu)$ *a platí*

$$\left| \int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu \right| \le \int_\Omega g \, \mathrm{d}\mu.$$

14.7 Obecná definice integrálu VI

Věta (28 Odhad integrálu)

Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *je měřitelný prostor,* Ω *je měřitelná a* $f\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ *patří do* $\mathcal{L}^*(\mu)$. *Potom též* $|f| \in \mathcal{L}^*(\mu)$ *(speciálně,* $|f|$ *je měřitelná) a platí*

$$\left|\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu\right| \le \int_\Omega |f| \, \mathrm{d}\mu.$$

Věta (29 Absolutní konvergence Lebesgueova integrálu V 15.8.8 (ii))

Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *je měřitelný prostor a* f *je měřitelná na měřitelné množině* Ω. *Potom*

$$f \in \mathcal{L}(\mu) \quad \Longleftrightarrow \quad |f| \in \mathcal{L}(\mu).$$

Věta (30 Odhad integrálu II)

Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *je měřitelný prostor,* Ω *je měřitelná,* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *patří do* $\mathcal{L}^*(\mu)$ *a* $g \in \mathcal{L}(\mu)$. *Nechť* $|f| \le g$ *s.v. na* Ω. *Potom je* $f \in \mathcal{L}(\mu)$ *a platí*

$$\left|\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu\right| \le \int_\Omega g \, \mathrm{d}\mu.$$

Věta (31 Odhad integrálu III T 15.7.3 (iii))

Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ je měřitelný prostor, Ω je měřitelná, f je nezáporná měřitelná funkce na Ω. Nechť $P \subset \Omega$ je měřitelná. Potom

$$\int_P f \, \mathrm{d}\mu \leq \int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu.$$

Lemma (8 Lévi či Lebesgueova věta o monotónní konvergenci I V 15.7.7)

Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ je měřitelný prostor, $\{f_n\}$ je posloupnost měřitelných nezáporných numerických funkcí definovaných na X a platí $f_n \leq f_{n+1}$ na X pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Bodovou limitu této posloupnosti označme f. Pak $f \in \mathcal{L}^*(\mu)$ a

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu.$$

Věta (31 Odhad integrálu III T 15.7.3 (iii))

Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ je měřitelný prostor, Ω je měřitelná, f je nezáporná měřitelná funkce na Ω. Nechť $P \subset \Omega$ je měřitelná. Potom

$$\int_P f \, \mathrm{d}\mu \leq \int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu.$$

Lemma (8 Lévi či Lebesgueova věta o monotónní konvergenci I V 15.7.7)

Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ je měřitelný prostor, $\{f_n\}$ je posloupnost měřitelných nezáporných numerických funkcí definovaných na X a platí $f_n \leq f_{n+1}$ na X pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Bodovou limitu této posloupnosti označme f. Pak $f \in \mathcal{L}^*(\mu)$ a

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu.$$