Matematika pro fyziky I

Milan Pokorný

Přednáška 6.10.2022

Věta (10 Spojitost a stejnoměrná konvergence Ds 14.3.2)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ a nechť $\{\varphi_n\} \subset C(\Omega)$ je posloupnost funkcí takových, že $\varphi_n \rightrightarrows \varphi$ na Ω. Potom je $\varphi \in C(\Omega)$.

Věta (11 Diniho věta V 14.3.7)

Nechť $\{\varphi_n\} \subset C([a,b])$, $\varphi \in C([a,b])$, $\varphi_n \to \varphi$ na $[a,b]$ a $\varphi_{n+1} \leq \varphi_n$ na $[a,b]$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Pak $\varphi_n \rightrightarrows \varphi$ na $[a,b]$.

Věta (10 Spojitost a stejnoměrná konvergence Ds 14.3.2)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *a nechť* $\{\varphi_n\} \subset C(\Omega)$ *je posloupnost funkcí takových, že* $\varphi_n \rightrightarrows \varphi$ *na* Ω*. Potom je* $\varphi \in C(\Omega)$*.*

Věta (11 Diniho věta V 14.3.7)

Nechť $\{\varphi_n\} \subset C([a,b])$, $\varphi \in C([a,b])$, $\varphi_n \to \varphi$ *na* $[a,b]$ *a* $\varphi_{n+1} \leq \varphi_n$ *na* $[a,b]$ *pro všechna* $n \in \mathbb{N}$*. Pak* $\varphi_n \rightrightarrows \varphi$ *na* $[a,b]$*.*

Věta (12 O vztahu stejnoměrné konvergence a derivace V 14.3.16)

Nechť $\{\varphi_n\}$ je posloupnost funkcí z omezeného intervalu $(a, b) \subset \mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$. Nechť každá funkce φ_n má na (a, b) vlastní derivaci, $\{\varphi_n'\}$ konverguje stejnoměrně na (a, b) a existuje $x_0 \in (a, b)$ takové, že $\{\varphi_n(x_0)\}$ konverguje. Pak existuje funkce φ taková, že $\varphi_n \rightrightarrows \varphi$ na (a, b), φ má vlastní derivaci na (a, b) a $\varphi_n' \rightrightarrows \varphi'$.

Věta (13 O stejnoměrné limitě primitivních funkcí Ds 14.3.17)

Nechť $\{\varphi_n\}$ je posloupnost funkcí z omezeného intervalu $(a, b) \subset \mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$. Nechť každá funkce φ_n má na (a, b) primitivní funkci Φ_n, $\{\varphi_n\}$ konverguje stejnoměrně na (a, b) k jisté funkci φ a existuje $x_0 \in (a, b)$ takové, že $\{\Phi_n(x_0)\}$ konverguje. Pak φ má primitivní funkci na (a, b), označme ji Φ, a platí pro ni $\Phi_n \rightrightarrows \Phi$ na (a, b).

13.3 Záměna limit, derivace a integrál posloupnosti a řady funkcí II

Věta (12 O vztahu stejnoměrné konvergence a derivace V 14.3.16)

Nechť $\{\varphi_n\}$ je posloupnost funkcí z omezeného intervalu $(a, b) \subset \mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$. Nechť každá funkce φ_n má na (a, b) vlastní derivaci, $\{\varphi_n'\}$ konverguje stejnoměrně na (a, b) a existuje $x_0 \in (a, b)$ takové, že $\{\varphi_n(x_0)\}$ konverguje. Pak existuje funkce φ taková, že $\varphi_n \rightrightarrows \varphi$ na (a, b), φ má vlastní derivaci na (a, b) a $\varphi_n' \rightrightarrows \varphi'$.

Věta (13 O stejnoměrné limitě primitivních funkcí Ds 14.3.17)

Nechť $\{\varphi_n\}$ je posloupnost funkcí z omezeného intervalu $(a, b) \subset \mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$. Nechť každá funkce φ_n má na (a, b) primitivní funkci Φ_n, $\{\varphi_n\}$ konverguje stejnoměrně na (a, b) k jisté funkci φ a existuje $x_0 \in (a, b)$ takové, že $\{\Phi_n(x_0)\}$ konverguje. Pak φ má primitivní funkci na (a, b), označme ji Φ, a platí pro ni $\Phi_n \rightrightarrows \Phi$ na (a, b).

13.3 Záměna limit, derivace a integrál posloupnosti a řady funkcí III

Věta (14 O záměně stejnoměrné limity a Riemannova integrálu V 14.3.10)

Nechť posloupnost $\{\varphi_n\} \subset C([a,b])$ *a* $\varphi_n \rightrightarrows \varphi$ *na* $[a,b]$. *Pak*

$$(\mathcal{R}) \int_a^b \varphi_n \, \mathrm{d}x \overset{n\to\infty}{\to} (\mathcal{R}) \int_a^b \varphi \, \mathrm{d}x.$$

Věta (15 Úplnost $C(K)$)

Nechť K je kompaktní podmnožina v $\mathbb{R}^N$. Nechť

$$C(K) = \{u : u \text{ je spojitá na } K \text{ vzhledem ke } K\}$$

a

$$\|u\|_{C(K)} = \max_{x \in K} |u(x)|.$$

Potom je $C(K)$ vzhledem k výše uvedené normě úplný normovaný (tedy Banachův) prostor.

Věta (7.2 Picard–Lindelöfova existenční věta)

Nechť $\mathbf{F} \colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ je spojitá na otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $(x_0, \mathbf{y}_0) \in \Omega$ a $\mathbf{F}$ je na Ω lokálně lipschitzovská vzhledem k poslední n-tici proměnných. Pak existuje $\delta > 0$ tak, že na intervalu $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ existuje právě jedno řešení Cauchyovy úlohy pro systém rovnic $\mathbf{y}' = \mathbf{F}(x, \mathbf{y})$ s počáteční podmínkou $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0$.

13.4 Aplikace stejnoměrné konvergence I

Věta (15 Úplnost $C(K)$)

Nechť K je kompaktní podmnožina v $\mathbb{R}^N$. Nechť

$$C(K) = \{u : u \text{ je spojitá na } K \text{ vzhledem ke } K\}$$

a

$$\|u\|_{C(K)} = \max_{x \in K} |u(x)|.$$

Potom je $C(K)$ vzhledem k výše uvedené normě úplný normovaný (tedy Banachův) prostor.

Věta (7.2 Picard–Lindelöfova existenční věta)

Nechť $\mathbf{F}\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ je spojitá na otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $(x_0, \mathbf{y}_0) \in \Omega$ a $\mathbf{F}$ je na Ω lokálně lipschitzovská vzhledem k poslední n-tici proměnných. Pak existuje $\delta > 0$ tak, že na intervalu $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ existuje právě jedno řešení Cauchyovy úlohy pro systém rovnic $\mathbf{y}' = \mathbf{F}(x, \mathbf{y})$ s počáteční podmínkou $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0$.

13.4 Aplikace stejnoměrné konvergence II

Lemma (2 Ekvivalentní formulace systému ODR)

Nechť $\mathbf{F}$ *je spojitá na* Ω*. Je-li* $\mathbf{y}$ *řešení Cauchyovy úlohy pro ODR v* Ω *na intervalu* $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$*, pak též řeší úlohu*

$$\mathbf{y}(x) = \mathbf{y}_0 + \int_{x_0}^{x} \mathbf{F}(\tau, \mathbf{y}(\tau))\,\mathrm{d}\tau, \qquad x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Naopak, je-li $\mathbf{y}$ *spojitá na* $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$*,* $(x, \mathbf{y}(x)) \in \Omega$ *pro všechna* $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ *a řeší úlohu výše, potom má* $\mathbf{y}$ *na intervalu* $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ *spojitou derivaci a řeší příslušnou Cauchyovu úlohu pro systém ODR 1. řádu.*