Matematika pro fyziky I

Milan Pokorný

Přednáška 3.1.2023

Opakování

Věta (10 O úplnosti trigonometrického systému V 19.3.1)

Nechť $a \in \mathbb{R}$ a $l > 0$. Pak trigonometrický systém odpovídající periodě l je úplný na $L^2((a, a + l))$.

Věta (11 Carlesonova věta 19.4.23)

Nechť $a \in \mathbb{R}$, $l > 0$, f je l-periodická funkce a $f \in L^2((a, a + l))$. Potom

$$\lim_{n \to \infty} F_{f,n}(x) = f(x)$$

pro skoro všechna $x \in \mathbb{R}$.

Opakování

Věta (10 O úplnosti trigonometrického systému V 19.3.1)

Nechť $a \in \mathbb{R}$ a $l > 0$. Pak trigonometrický systém odpovídající periodě l je úplný na $L^2((a, a + l))$.

Věta (11 Carlesonova věta 19.4.23)

Nechť $a \in \mathbb{R}$, $l > 0$, f je l-periodická funkce a $f \in L^2((a, a + l))$. Potom

$$\lim_{n \to \infty} F_{f,n}(x) = f(x)$$

pro skoro všechna $x \in \mathbb{R}$.

Věta (12 Riemann–Lebesgueovo lemma V 19.3.7)

Nechť $a \in \mathbb{R}$, $l > 0$ *a* $f \in L^1((a, a+l))$. *Pak*

$$\int_a^{a+l} f(x) \cos\left(\frac{2k\pi}{l}x\right) \mathrm{d}x \overset{k\to\infty}{\to} 0 \qquad a \qquad \int_a^{a+l} f(x) \sin\left(\frac{2k\pi}{l}x\right) \mathrm{d}x \overset{k\to\infty}{\to} 0.$$

Speciálně $a_k \to 0$ *a* $b_k \to 0$ *pro* $k \to \infty$.

Věta (13 O vztahu hladkosti funkce a chování Fourierových koeficientů V 19.3.10)

Nechť $a \in \mathbb{R}$, $l > 0$ *a* $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.
(i) *Nechť* $f \in C^n(\mathbb{R})$, f *je* l*-periodická,* $f^{(n+1)}$ *existuje v intervalu* $(a, a+l)$ *až na konečně mnoho bodů a je po částech spojitá na* $[a, a+l]$. *Pak*

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^n(|a_k| + |b_k|) < \infty.$$

Dále $F_{f,n} \rightrightarrows f$ *na* $[a, a+l]$, *řadu* F_f *lze až* n*-krát derivovat člen po členu, výsledné řady konvergují stejnoměrně na* $[a, a+l]$ *k odpovídajícím derivacím funkce* f *a jsou jejich Fourierovými řadami.*
(ii) *Jestliže* $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *splňuje* $\sum_{k=1}^{\infty} k^n(|a_k| + |b_k|) < \infty$, *pak trigonometrická řada odpovídající koeficientům* a_k, b_k *konverguje stejnoměrně na* $\mathbb{R}$, *součet je* l*-periodická* $C^n([a, a+l])$*-funkce, řadu lze až* n*-krát derivovat člen po členu a výsledné řady konvergují stejnoměrně na* $\mathbb{R}$ *k odpovídajícím derivacím součtu řady a jsou jejich Fourierovými řadami.*

18.4 Fourierovy řady odpovídající trigonometrickému systému III

Věta (14 O integrálním zápisu Fourierovy řady V 19.3.11)

Nechť $a \in \mathbb{R}$, $l > 0$, $f \in L^1((a, a+l))$, f je l-periodická a $n \in \mathbb{N}$. Pak pro n-tý částečný součet Fourierovy řady platí

$$F_{f,n}(x) = \int_a^{a+l} D_n(x-t) f(t) \, \mathrm{d}t \qquad \text{na } \mathbb{R},$$

kde

$$D_n(z) := \begin{cases} \frac{2n+1}{l} & \text{pro } z = ml, \, m \in \mathbb{Z} \\ \frac{1}{l} \frac{\sin(\frac{2\pi}{l}(n+\frac{1}{2})z)}{\sin(\frac{2\pi}{l}\frac{z}{2})} & \text{jinak.} \end{cases}$$

Lemma (1 O vlastnostech Dirichletova jádra L 19.3.13)

Nechť $a \in \mathbb{R}$ a $l > 0$.

(i) *Dirichletovo jádro je sudé, nekonečně hladké, l-periodické a*

$$\int_a^{a+l} D_n(z)\,\mathrm{d}z = 1.$$

(ii) *Jestliže $h \in L^1((a, a+l))$, pak*

$$\int_a^{a+l} h(z) \sin\left(\frac{2\pi}{l}\left(n + \frac{1}{2}\right)z\right) \mathrm{d}z \overset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Lemma (2 O lokalizaci V 19.3.14)

Nechť $a \in \mathbb{R}$, $l > 0$, $f \in L^1((a, a+l))$ a f je l-periodická. Nechť $x \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}$ a $\delta \in (0, \frac{l}{2})$. Pak

$$F_f(x) = A \quad \iff \quad \int_0^{\delta} \left(f(x+z) + f(x-z) - 2A\right) D_n(z)\,\mathrm{d}z \overset{n\to\infty}{\to} 0.$$

18.4 Fourierovy řady odpovídající trigonometrickému systému IV

Lemma (1 O vlastnostech Dirichletova jádra L 19.3.13)

Nechť $a \in \mathbb{R}$ a $l > 0$.
(i) *Dirichletovo jádro je sudé, nekonečně hladké, l-periodické a*

$$\int_a^{a+l} D_n(z)\,\mathrm{d}z = 1.$$

(ii) *Jestliže $h \in L^1((a, a+l))$, pak*

$$\int_a^{a+l} h(z) \sin\left(\frac{2\pi}{l}\left(n + \frac{1}{2}\right)z\right) \mathrm{d}z \overset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Lemma (2 O lokalizaci V 19.3.14)

Nechť $a \in \mathbb{R}$, $l > 0$, $f \in L^1((a, a+l))$ a f je l-periodická. Nechť $x \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}$ a $\delta \in (0, \frac{l}{2})$. Pak

$$F_f(x) = A \qquad \Longleftrightarrow \qquad \int_0^{\delta} \big(f(x+z) + f(x-z) - 2A\big) D_n(z)\,\mathrm{d}z \overset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Věta (15 Diniho kritérium V 19.3.15)

Nechť $a \in \mathbb{R}$, $l > 0$, $f \in L^1((a, a+l))$, f je l-periodická a $x \in \mathbb{R}$. Nechť existují $\delta > 0$ a $A \in \mathbb{R}$ taková, že

$$\int_0^\delta \frac{|f(x+z) + f(x-z) - 2A|}{z} \, \mathrm{d}z$$

konverguje. Pak $F_f(x) = A$.

Lemma (3 O vlivu translace na Fourierovy řady L 19.3.17)

Nechť $a \in \mathbb{R}$, $l > 0$, $f \in L^1((a, a+l))$, f je l-periodická a $b > 0$. Položme $g(x) := f(x+b)$ na $\mathbb{R}$. Pak pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $x \in \mathbb{R}$ platí

$$F_{g,n}(x) = F_{f,n}(x+b).$$

Speciálně pokud $F_{f,n} \rightrightarrows F_f$ na $\mathbb{R}$, pak $F_{g,n} \rightrightarrows F_g$ na $\mathbb{R}$.

Věta (15 Diniho kritérium V 19.3.15)

Nechť $a \in \mathbb{R}$, $l > 0$, $f \in L^1((a, a+l))$, f je l-periodická a $x \in \mathbb{R}$. Nechť existují $\delta > 0$ a $A \in \mathbb{R}$ taková, že

$$\int_0^\delta \frac{|f(x+z) + f(x-z) - 2A|}{z} \, \mathrm{d}z$$

konverguje. Pak $F_f(x) = A$.

Lemma (3 O vlivu translace na Fourierovy řady L 19.3.17)

Nechť $a \in \mathbb{R}$, $l > 0$, $f \in L^1((a, a+l))$, f je l-periodická a $b > 0$. Položme $g(x) := f(x+b)$ na $\mathbb{R}$. Pak pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $x \in \mathbb{R}$ platí

$$F_{g,n}(x) = F_{f,n}(x+b).$$

Speciálně pokud $F_{f,n} \rightrightarrows F_f$ na $\mathbb{R}$, pak $F_{g,n} \rightrightarrows F_g$ na $\mathbb{R}$.