

## Henri Lebesgue a jeho integrál

### Lebesgueova a Léviho věta

Spočtěte následující integrály. Ověřte předpoklady vět, které používáte!

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^n}{n} dx$
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \frac{\ln(x+n)}{n} e^{-x} \cos x dx$
3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}} dx$
4.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} e^{-nx} x^2 dx$

Rozvinutím vhodné funkce do řady spočtěte následující integrály. Ověřte předpoklady vět, které používáte!

5.  $\int_0^{\infty} \frac{x}{e^x - 1} dx \quad \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \right)$
6.  $\int_0^1 \frac{\ln(\frac{1}{x})}{1-x^2} dx \quad \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \right)$
7.  $\int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx \quad \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^2}{90} \right)$

### Integrály závislé na parametru

8. Ukažte, že následující integrály jsou spojitými funkcemi proměnné na dané množině:

a)  $\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x^a (\pi - x)^a} dx, a < 2$

$$\text{b) } \int_0^2 x^2 \cos ax \, dx, \quad -\infty < a < \infty$$

$$\text{c) } \int_1^\infty \frac{\cos x}{x^a} \, dx, \quad 1 < a < \infty$$

Zjistěte, pro které hodnoty parametru integrál konverguje, a spočtěte jej:

$$9. \int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} ax}{x(1+x^2)} \, dx$$

$$10. \int_0^\infty \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x} \, dx$$

$$11. \int_0^\infty \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x^2} \, dx$$

$$12. \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} \, dx$$

$$13. \int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} ax \operatorname{arctg} bx}{x^2} \, dx$$

$$14. \int_0^\infty e^{-ax^2} \cos bx \, dx$$

$$15. \int_0^\infty e^{-ax^2} \cosh bx \, dx$$

$$16. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(1 + a \sin^2 x)}{\sin^2 x} \, dx$$

$$17. \int_0^\pi \ln(a \pm b \cos x) \, dx$$

$$18. \int_0^\infty x e^{-ax} \cos bx \, dx$$

$$19. \int_0^\infty e^{-ax} \frac{1 - \cos x}{x} \, dx$$

20.  $\int_0^{\infty} e^{-ax} \frac{\sinh x}{x} dx$

21.  $\int_0^1 x^{-\alpha} \ln^n x dx, n \in \mathbb{N}_0$

22.  $\int_0^{\pi/2} \ln(a^2 + b^2 \operatorname{tg}^2 x) dx$

23.  $\int_{x>0, y>0} e^{-(x+y+\frac{a^3}{xy})} x^{-1/3} y^{-2/3} dx dy$

Doplněním vhodného parametru spočtete:

24.  $\int_0^{\pi/2} \frac{x}{\operatorname{tg} x} dx$

25.  $\int_0^{\infty} \frac{\sin^4 x}{x^2} dx$

26. Vyšetřete průběh funkce na jejím definičním oboru:

$$F(a) = \int_0^1 \frac{\ln(1 - a^2 x^2)}{x^2 \sqrt{1 - x^2}} dx$$