Klasický variační počet

1. Nechť $\Phi(y) = \int_a^b (y^2 + (y')^2)\,\mathrm{d}x$, $y \in C^1[a,b]$. Spočtěte Gâteauxovy diferenciály $D\Phi(y;h)$, $D^2\Phi(y;h,k)$ a $D^3\Phi(y;h,k,l)$.

2. Spočtěte první Gâteauxův a Fréchetův diferenciál funkcionálu $\Phi(y) = \int_0^1 x^2(y^4 - (y')^2)\,\mathrm{d}x$ na $C^1[0,1]$.

3. Spočtěte první a druhý Gâteauxův diferenciál funkcionálu $\Phi(y) = \int_0^1 \left[x^2 \sin(\pi y) + (y')^3 + y''y''' + y\mathrm{e}^{-(y'')^2}\right]\mathrm{d}x$ na $C^3[0,1]$.

4. Spočtěte první Gâteauxův diferenciál funkcionálu $\Phi(y_1,y_2) = \int_0^1 \left[xy_1^2 + (y_1')^2(y_2')^2 + (y_2')^6\right]\mathrm{d}x$ na $C^1[0,1] \times C^1[0,1]$.

5. Ukažte, že funkcionál $\Phi(y) = \int_{-1}^1 x^2(y')^2\,\mathrm{d}x$ nemá na množině $M = \{y \in C^1[-1,1]; y(-1) = -1, y(1) = 1\}$ minimum.

   Návod: Uvažujte funkce $y_a(x) = \operatorname{arctg}(x/a)/\operatorname{arctg}(1/a)$.

6. Ukažte, že funkcionál $\Phi(y) = \int_{-1}^1 x^{\frac{2}{5}}(y')^2\,\mathrm{d}x$ nemá na množině $M = \{y \in C^1[-1,1]; y(-1) = -1, y(1) = 1\}$ minimum.

   Návod: Uvažujte řešení Euler–Lagrangeovy rovnice.

7. Najděte extremály (tj. řešení příslušné Euler–Lagrangeovy rovnice) pro funkcionál $\Phi(y) = \int_0^{2\pi} \left[(y')^2 - y^2\right]\mathrm{d}x$ na množině $M = \{y \in C^1[0,2\pi]; y(0) = y(2\pi) = 1\}$.

8. Nechť $\Phi(y) = \int_0^1 y^2(x^n - y)\,\mathrm{d}x$ pro n přirozené dostatečně velké číslo a nechť $M = \{u \in C^1[0,1]; u(0) = u(1) = 0\}$.
   a) Ukažte, že jediným řešením Euler–Lagrangeovy rovnice ležícím v množině M je $y_0 = 0$.
   b) Ukažte, že $D^2\Phi(y_0;h,h) > 0$ pro $h \in M$, $h \neq 0$.
   c) Ukažte, že y_0 není bodem extrému funkcionálu, tj. v libovolném okolí bodu y_0 (v metrice $C^1[0,1]$) existují body y_1, $y_2 \in M$ tak, že $\Phi(y_1) < \Phi(y_0) = 0 < \Phi(y_2)$.

Nalezněte extrémy následujících funkcionálů na množinách spojitě diferencovatelných funkcí až do hranice splňujících níže uvedené hraniční podmínky.

9. $\Phi(y) = \int_1^2 \left[x(y')^4 - 2y(y')^3\right] \mathrm{d}x$, $y(1) = 0$, $y(2) = 1$

10. $\Phi(y) = \int_2^3 \frac{x^3}{(y')^2} \mathrm{d}x$, $y(2) = 4$, $y(3) = 9$

11. $\Phi(y) = \int_0^1 \left[(y')^2 + x^2\right] \mathrm{d}x$, $y(0) = -1$, $y(1) = 1$

12. $\Phi(y) = \int_0^a \left[1 - \mathrm{e}^{-(y')^2}\right] \mathrm{d}x$, $y(0) = 0$, $y(a) = b$, $a > 0$

13. $\Phi(y) = \int_0^1 y(y')^2 \mathrm{d}x$, $y(0) = p > 0$, $y(1) = q > 0$.

V následujících úlohách hledejte minimum funkcionálu $\Phi(y)$ na spojitě diferencovatelných funkcích, splňujících dané hraniční podmínky a vazební podmínku $g(y) = const$

14. $\Phi(y) = \int_0^\pi (y')^2 \mathrm{d}x$, $y(0) = y(\pi) = 0$, $g(y) = \int_0^\pi y^2 \mathrm{d}x = 1$

15. $\Phi(y) = \int_0^1 (y')^2 \mathrm{d}x$, $y(0) = 1$, $y(1) = 6$, $g(y) = \int_0^1 y \,\mathrm{d}x = 3$

16. $\Phi(y) = \int_0^1 \left[x^2 + (y')^2\right] \mathrm{d}x$, $y(0) = y(1) = 0$, $g(y) = \int_0^1 y^2 \mathrm{d}x = 2$

17. $\Phi(y) = \int_0^1 (y')^2 \mathrm{d}x$, $y(0) = 0$, $y(1) = \frac{\pi}{4}$, $g(y) = \int_0^1 \left[y - (y')^2\right] \mathrm{d}x = \frac{1}{12}$.

Klasický variační počet - aplikace ve fyzice

18. Nechť lagrangián L nezávisí explicitně na čase, tj. $L = L(x, \dot{x})$. Ukažte, že podél libovolné extremály platí zákon zachování energie, tj.

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big\{E(x_0(t), \dot{x}_0(t))\Big\} = 0.$$

($E = \sum_{i=1}^N \dot{x}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - L$).

19. Nechť pro pevné $i = \{1, 2, \dots N\}$ lagrangián nezávisí na x_i. Potom podél libovolné extremály platí zákon zachování hybnosti, tj.

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big\{\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}(t, x_0(t), \dot{x}_0(t))\Big\} = 0.$$

20. Hamiltonův princip v klasické mechanice tvrdí, že mechanická soustava popsaná souřadnicemi q_1, q_2, ..., q_N se bude pohybovat tak, aby akce

$$S = \int_P^Q L \, \mathrm{d}t \qquad L = T(t, q, \dot{q}) - U(t, q)$$

(T, U dané funkce, reprezentující kinetickou a potenciální energii soustavy) byla stacionární, tj. bude-li vektorová funkce $q(t)$ řešit Euler–Lagrangeovy rovnice. Napište tyto rovnice.

21. Pomocí zákona zachování energie (viz výše) ukažte, že pro extremály akce S dané lagrangiánem $L = \frac{1}{2} \sum_{i,j} g_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j$ je parametr t přirozený parametr, tj.

$$\frac{d}{dt} \Big\{ \sum_{ij} g_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j \Big\} = 0.$$

Sestavte Hamiltonovy rovnice pro následující funkcionály

22. $J(y_1, y_2) = \int_0^\pi (2y_1 y_2 - 2y_1^2 + (\dot{y}_1)^2 - (\dot{y}_2)^2) \, \mathrm{d}t$

23. $J(y) = \int_a^b \sqrt{t^2 + y^2} \sqrt{1 + (\dot{y})^2} \, \mathrm{d}t$

24. $J(y_1, y_2) = \int_a^b (t^2 + y_1 (\dot{y}_1)^2 + y_2 (\dot{y}_2)^2) \, \mathrm{d}t.$