(1.) Nađite sve točke podesne za ekstrem funkcionala

(6b) $\Phi[y] = \int_0^1 (y^2+(y')^2)\,dx$

na skupu $\Pi = \{\int_0^1 y\,dx = 1 \quad , \quad y(0)=0 \; , y(1)=0\}$.

Potom [illegible] o kojoj [illegible] ovisi [illegible].

Rješenje

$\Gamma(y) = \int_0^1 y\,dx = 1$

Lagrange:

$\delta\Phi[y](h) - \lambda\, \delta\Gamma[y](h) = 0$ 1b

$\Downarrow$

$2y - 2y'' = \lambda$ 1b

rješenje

$y'' - y = \ell$

$\Downarrow$ ODJ 2.r.

$r^2 - 1 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \pm 1$

$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - \ell$ 1b

Podmi uvjeti:

$y(0)=0 \quad C_1 + C_2 - \ell = 0 \quad (1)$

$y(1)=0 \quad C_1 e + \frac{C_2}{e} - \ell = 0 \quad (2)$

$\int_0^1 y\,dx = 1 \quad C_1(e-1) - C_2(\frac{1}{e}-1) - \ell = 1 \quad (3)$

1b

$(2)-(1)$: $\quad C_1(e-1) + C_2(\frac{1}{e}-1) = 0$

$(2)-(3)$ $\quad C_1 + C_2(\frac{2}{e}-1) = -1 \quad / e-1$

1,5b

$C_2 \frac{1}{e}(1-e) - C_2(\frac{2}{e}-1)(e-1) = -(1-e)$

$\frac{C_2}{e} + C_2(\frac{2}{e}-1) = -1$

$C_2 = -\frac{e}{3-e}$

$C_1 = -1 + \frac{e}{3-e}\,\frac{2-e}{e} \quad \frac{-3+e+2-e}{3-e} = -\frac{1}{3-e}$

$\ell = C_1 + C_2 = -\frac{(1+e)}{3-e}$

0,5b

$y(x) = -\frac{1}{3-e} e^x - \frac{e}{3-e} e^x + \frac{(1+e)}{3-e}$,

$x \in [0,1]$.

(2) V závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ studujte charakter konvergence (bodové, stejnoměrné resp. lokálně stejnoměrné konvergence) posloupnosti fcí

$$\varphi_n(x) = n^\alpha x\, e^{-n^2 x}$$

na intervalu $[0,+\infty)$ resp. $(0,+\infty)$.

(6b)

~~Ře~~ Řešení

Bodová konvergence

$x = 0 \Rightarrow \varphi_n(0) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$ 0,5

$x > 0 \Rightarrow \varphi_n(x) = \underbrace{n^\alpha x}_{\substack{\downarrow \text{ max} \\ ?\, 0 \text{ či } \infty}} \; \underbrace{e^{-n^2 x}}_{\substack{\downarrow \text{ exp.} \\ 0}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$ 1b

Tedy $\varphi_n(x) \to 0$ na $[0,\infty)$.

Stejnoměrná konvergence

$\varphi_n(0) = 0 \qquad \varphi_n'(x) = n^\alpha e^{-n^2 x}(1 - n^2 x)$ 1b

$\lim_{x\to+\infty} \varphi_n(x) = 0 \qquad \varphi_n'(x) = 0 \iff \underbrace{x = \frac{1}{n^2}}$

Tedy $\sup_{[0,+\infty)} \varphi_n(x) = \sup_{[0,+\infty)} |\varphi_n(x) - 0| = \varphi_n\left(\frac{1}{n^2}\right) = n^{\alpha-2} e^{-1}$ 0,5b

$\lim_{n\to\infty} n^{\alpha-2} e^{-1} = 0$ pro $\alpha < 2 \Rightarrow \varphi_n(x) \rightrightarrows 0$ na $[0,+\infty)$ pro $\alpha < 2$ 1b

Pro $\alpha \geq 2$ řada stejnoměrně na $[0,\infty)$ nekonverguje. Nebo ale pro $\delta > 0$ (libovolné)

$\sup_{[\delta,+\infty)} \varphi_n(x) = \varphi_n(\delta) = n^\alpha \delta\, e^{-n^2\delta}$ jakmile n dost velké $\left(\frac{1}{n^2} < \delta\right)$. 1b

Tedy $\lim_{n\to\infty} \sup_{[\delta,+\infty)} \varphi_n(x) = 0 \quad \forall \delta > 0 \Rightarrow \varphi_n(x) \overset{loc}{\underset{(0,+\infty)}{\rightrightarrows}} 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$. 0,5b

Závěr: $\varphi_n(x) \to 0$ na $[0,+\infty)$

$\varphi_n(x) \rightrightarrows 0$ na $[0,+\infty)$ pro $\alpha < 2$ 0,5b

$\varphi_n(x) \overset{loc}{\rightrightarrows} 0$ na $(0,+\infty)$ pro všechna $\alpha \in \mathbb{R}$.

(3) Pro $a \geq -1$ spočtěte

(0,5b)

$$\varphi(a) = \int_0^1 \frac{\ln(1+ax^2)}{x^2}\,dx.$$

Pro rozumné vlastnosti φ zkontrolujte splnění předpokladů daných vět!

Nápověda

Je třeba rozvrhnout zvlášť $a>0$ a $-1 \leq a < 0$ a dále i případ $a>-1$ a $a=-1$. $\varphi(a)$ je totiž spojitá na $[-1,+\infty)$, ale diferencovatelná pouze na $(-1,+\infty)$. Tedy vyjde po výpočtu: spočtěte $\varphi'(a)$ pro $a>-1$, odvoďte vzorec $\varphi(a)$ pro $a>-1$ a pak proveďte příslušnou limitu. Tyto vlastnosti ale prověřte!

Řešení

Nejprve rozepíšeme $\varphi(a)$ a ukážeme, že $\varphi(a) \in C([-1,+\infty))$. Zřejmě je

$$\left|\frac{\ln(1+ax^2)}{x^2}\right| \leq C(a_0) \quad \text{pro } 0 \leq a \leq a_0 < +\infty$$

$$\leq \frac{\ln(1-x^2)}{x^2} \in L^1(0,1) \quad \text{pro } -1 \leq a \leq 0.$$

1b

Protože $\frac{\ln(1+ax^2)}{x^2}$ je pro s.v. $x \in (0,1)$ spojitá, je $\varphi(a) \in C([-1,+\infty))$.

Dále ukážeme, že $\varphi'(a) = \int_0^1 \frac{1}{1+ax^2}\,dx$. Protože $\varphi(0)=0$, $\frac{1}{1+ax^2} \leq \frac{1}{1+a_0x^2}$ pro $-1 < a_0 \leq a$ pro libovolné $a_0 \in (-1,0)$, je tedy $\varphi'(a)$ definována na $(-1,+\infty)$ a platí vzorec výše (derivace $\exists$ a vzorec o.k.). 1,5b

Nechť $a>0$. Potom

$$\varphi'(a) = \int_0^1 \frac{1}{1+ax^2}\,dx = \left[\frac{\operatorname{arctg}(\sqrt{a}\,x)}{\sqrt{a}}\right]_0^1 = \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{a}}{\sqrt{a}},$$ 0,5b

tedy

$$\varphi(a) = \int \frac{\operatorname{arctg}(\sqrt{a})}{\sqrt{a}}\,da = \begin{bmatrix} a = t^2 \\ da = 2t\,dt \end{bmatrix} = \int \frac{\operatorname{arctg} t \; 2t\,dt}{t} = 2\int \operatorname{arctg} t\,dt$$ 0,5b

$$= 2\left(t \operatorname{arctg} t - \int \frac{t}{1+t^2}\,dt\right) = 2t\operatorname{arctg} t - \ln(1+t^2) + C$$

$$= 2\sqrt{a}\operatorname{arctg}\sqrt{a} - \ln(1+a) + C$$ 0,5b

Protože $\lim_{a\to0^+} \varphi(a) = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow$

$$\varphi(a) = 2\sqrt{a}\operatorname{arctg}\sqrt{a} - \ln(1+a^2) \qquad a \in [0,+\infty).$$ 1b

Pro $a<0$, $(a>-1)$ máme $(b=-a)$

$$\varphi'(a) = \int_0^1 \frac{1}{1-bx^2}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{(1-\sqrt{b}x)(1+\sqrt{b}x)}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{1+\sqrt{b}x}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1-\sqrt{b}x}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\ln(1+\sqrt{b})}{\sqrt{b}} - \frac{1}{2}\frac{\ln(1-\sqrt{b})}{\sqrt{b}} \quad 0{,}5b$$

$\Downarrow$

$$\varphi(a) = \frac{1}{2}\int \left(\frac{\ln(1+\sqrt{|a|})}{\sqrt{|a|}} - \frac{\ln(1-\sqrt{|a|})}{\sqrt{|a|}}\right) da \quad 0{,}5b \qquad -a = |a| = s^2 \Rightarrow s = \sqrt{|a|}$$

$$\varphi(a) = - \cancel{1} \int \left(\ln(1+s) - \ln(1-s)\right) ds \quad 0{,}5b \quad = -s\ln(1+s) + s\ln(1-s) + \int\left(\frac{s+1-1}{1+s} + \frac{s-1+1}{1-s}\right)ds$$

$$= s\ln(1-s) - s\ln(1+s) - \ln(1+s) - \ln(1-s) + C \quad 0{,}5b$$

$s=0 \Rightarrow C=0$

$$\varphi(a) = \sqrt{|a|}\ln(1-\sqrt{|a|}) - \sqrt{|a|}\ln(1+\sqrt{|a|}) - \ln(1+\sqrt{|a|}) - \ln(1-\sqrt{|a|}) \quad 0{,}5b \qquad 0 \le |a| < 1$$

$$\underbrace{\varphi(-1) = \lim_{a\to -1} \varphi(a) = -2\ln 2} \quad 0{,}5b$$

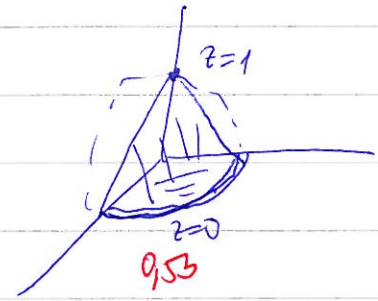
Závěr:
$$\varphi(a) = \begin{cases} 2\sqrt{a}\,\operatorname{arctg}\sqrt{a} - \ln(1+a) & a>0 \\ 0 & a=0 \\ \sqrt{|a|}\ln(1-\sqrt{|a|}) - \sqrt{|a|}\ln(1+\sqrt{|a|}) - \ln(1+\sqrt{|a|}) - \ln(1-\sqrt{|a|}) & -1<a<0 \\ -2\ln 2 & a=-1 \end{cases} \quad 0{,}5b$$

(1) Izračunaj ~~obseg ploskve~~ površ obroča omejenega z $(x^2+y^2)^{\frac{3}{4}} + z = 1$

$z = 0$.

(6b)

Rešitev



0,5b

Površina sestoji se dveh delov

a) podstava je krog s polmerom 1 (pri $z=0$ imamo $x^2+y^2=1$)

Torej njen obseg je π (mera [illegible])

1b

b) bočni del

Uporabimo polarne zamenjave in parametrizacijo bočnega dela

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \\ z &= 1 - r^{\frac{3}{2}} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} -r\sin\varphi & \cos\varphi \\ r\cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & -\frac{3}{2} r^{\frac{1}{2}} \end{matrix}$$

1,5b

$$\Rightarrow dS = r\sqrt{\left(1+\tfrac{9}{4}r\right)}\, dr\, d\varphi \qquad \varphi \in \left[0, \tfrac{\pi}{2}\right] \quad r \in [0,1] \quad 4x$$

0,5b

0,5b

$$S_2 = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 r\sqrt{1+\tfrac{9}{4}r}\, dr\, d\varphi = 2\pi \int_0^1 r\sqrt{1+\tfrac{9}{4}r}\, dr$$ (ali lin. sub. $\sqrt{1+\frac{9}{4}r} = z$)

$$= 2\pi\left(\left[r\,\frac{\left(1+\frac{9}{4}r\right)^{3/2}}{\frac{3}{2}}\cdot\frac{4}{9}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{\left(1+\frac{9}{4}r\right)^{3/2}}{\frac{3}{2}}\frac{4}{9}\, dr\right)$$ 1b

$$= 2\pi\left(\frac{\left(1+\frac{9}{4}\right)^{3/2}}{\frac{3}{2}}\frac{4}{9} - \frac{\frac{4}{9}\cdot\frac{4}{9}\left[\left(1+\frac{9}{4}r\right)^{5/2}\right]_0^1}{\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}}\right) = 2\frac{2}{3}\frac{4}{9}\pi\left(1+\frac{9}{4}\right)^{3/2}\left(1-\frac{2}{5}\frac{4}{9}\left(1+\frac{9}{4}\right)\right) + 2\pi\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{4}{15}$$

$$= 2\pi\,\frac{8}{27}\left(1+\frac{9}{4}\right)^{3/2}\left(1-\frac{8}{45}-\frac{2}{5}\right) = \underline{2\pi\,\frac{2}{15}\,\frac{19}{45}\left(1+\frac{9}{4}\right)^{3/2}}$$ 0,5b

Torej $\underline{S = S_1 + S_2 = \pi\left(1 + \frac{4\cdot 19}{15\cdot 45}\left(1+\frac{9}{4}\right)^{3/2}\right)}$ 0,5b $+\ 2\pi\cdot\frac{64\cdot 4}{9\cdot 9\cdot 15}$

$$= \underline{\pi + 2\pi\frac{8}{27}\left(1+\frac{9}{4}\right)^{3/2}\left(1-\frac{8}{45}\left(\frac{13}{4} - \frac{1}{\left(1+\frac{9}{4}\right)^{3/2}}\right)\right)}$$ O.K. ✓