Početní část zkoušky 6.6.2022

Jméno:

Skupina:

1. (8b) Nalezněte řešení ODR
$$y' = \frac{\sqrt{1-y^2}}{1+x^2}$$
splňující a) $y(0) = 0$ b) $y(0) = \frac{1}{2}$ c) $y(0) = -\frac{1}{2}$ d) $y(0) = 1$.

2. (7b) V závislosti na parametru $p \in \mathbb{R}$ vyšetřete konvergenci mocninné řady, včetně kružnice konvergence
$$\sum_{k=1}^{\infty} z^k \operatorname{arctg}\left(\frac{(-1)^k}{k^p}\right)\frac{1}{\ln^2\left(1+k^2\right)}.$$
Pokud používáte nějaké kritérium konvergence řady nebo nějakou větu, vysvětlete.

3. (7b) Uvažujte funkce
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin^2 x(1-\cos y)}{(x^4+y^4)^\alpha \ln(x^2+y^2)} & (x,y) \neq 0 \\ 0 & (x,y) = 0. \end{cases}$$
V závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ zjistěte, zda funkce f v bodě $(0,0)$
a) je spojitá
b) má parciální derivace
c) má spojité parciální derivace
d) má totální diferenciál.

4. (5b) Nalezněte lokální extrémy (pokud existují) funkce
$$f(x,y,z) = 2x^2 - xy + 2xz - y + y^3 + z^2$$
na $\mathbb{R}^3$.

Nalezněte též body (pokud existují), ve kterých se tyto extrémy nabývají.

Teoretická část zkoušky 6.6.2022

Jméno:

Skupina:

1. (8b) (i) Definujte pojem wronskián.
(ii) Definujte lineární závislost a nezávislost funkcí.
(iii) Ukažte, že pokud je n funkcí lineárně závislých, pak je jejich wronskián nulový, ale opačná implikace obecně nemusí platit.
(iv) Formulujte Větu o derivaci wronskiánu.
(v) Dokažte, že pro případ řešení lineární ODR je nulovost wronskiánu ekvivalentní lineární závislosti funkcí.

2. (7b) (i) Definujte pojmy metrika a metrický prostor.
(ii) Definujte pojmy norma a lineární normovaný vektorový prostor.
(iii) Ukažte, že každý lineární normovaný prostor lze pro vhodnou volbu metriky chápat jako metrický prostor, ale opačně to neplatí (tj. uveďte příklad metrického prostoru, který nelze chápat jako lineární normovaný prostor).
(iv) Definujte pojem limita posloupnosti prvků metrického prostoru.
(v) Ukažte, že pokud limita ve smyslu výše existuje, pak je daná jednoznačně.

3. (8b) Uvažujte funkcionál

$$\Phi[u] = \int_a^b L(x, y(x), y'(x))\,\mathrm{d}x$$

a úlohu hledání

$$\min_M \Phi[u], \qquad M = \{u \in C^1([a,b]) : u(a) = A, u(b) = B\}.$$

(i) Přeformulujte úlohu tak, byste mohli použít pojem Gateauxova diferenciálu (souvisí to s problémem, že M nemá lineární strukturu).
(ii) Pro dostatečně hladkou funkci L a vhodnou formulaci z předchozího bodu spočtěte Gateauxův diferenciál Φ.
(iii) Formulujte a dokažte du Bois-Reymondovo lemma.
(iv) Pomocí bodů (ii) a (iii) odvoďte tvar Euler–Lagrangeových rovnic.