Početní část zkoušky 26.5.2022

Jméno:

Skupina:

1. (7b) Nalezněte řešení ODR

$$y''' - 2y'' + y' - 2y = \mathrm{e}^{2x} + \cos(2x)$$

splňující $y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$ a $\quad y''(0) = 1$.

2. (6b) V závislosti na parametru $p \in \mathbb{R}$ rozhodněte o konvergenci/divergenci/oscilaci číselné řady

$$\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \sin(\min\{1, k^{-p}\}) \ln^p k.$$

Pro které hodnoty p je konvergence absolutní?

3. (8b) Nalezněte lokální extrémy funkce

$$f(x, y) = \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}(x^2 + 10y - 5)$$

na $\mathbb{R}^2$. Rozhodněte, ve kterých bodech nabývá funkce lokální minimum a ve kterých lokální maximum a určete (pokud existují) také hodnoty globálního maxima a minima na $\mathbb{R}^2$.

4. (6b) Ukažte, že předpis

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}(x + y + z)\right) + \ln(x^2 + y^2 - z^2) = 1$$

určuje na jistém okolí bodu $(1, 1, 1)$ hladkou funkci $z = z(x, y)$. Spočtěte $\frac{\partial z}{\partial x}(1, 1)$ a $\frac{\partial z}{\partial y}(1, 1)$.

Teoretická část zkoušky 26.5.2022

Jméno:

Skupina:

1. (7b) Uvažujte obyčejnou diferenciální rovnici

$$y''' + 4yy'' - 7\sin(y^3) = \sin x.$$

(i) Definujte pojem řešení této rovnice.
(ii) Uvažujte navíc podmínky $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$ a $y''(0) = 3$. Přepište tuto úlohu na Cauchyovu úlohu pro systém tři rovnic prvního řádu.
(iii) Formulujte Picard–Lindelöfovu větu o existenci a jednoznačnosti řešení Cauchyovy úlohy pro systém ODR prvního řádu.
(iv) Rozhodněte, zda můžeme tuto větu použít k důkazu právě jednoho řešení výše získané úlohy na intervalu $(-\delta, \delta)$ pro jisté $\delta > 0$.

2. (8b) (i) Definujte pojem norma a lineární normovaný prostor (LNP).
(ii) Definujte pojem ekvivalentní normy.
(iii) Definujte pojem konvergence posloupnosti prvků v LNP.
(iv) Ukažte, že konvergence v konečně dimenzionálním LNP je ekvivalentní konvergenci po složkách.
(v) Ukažte, že v konečně dimenzionální LNP jsou všechny normy ekvivalentní.

3. (8b) (i) Definujte pojem potenciál vektorového pole.
(ii) Definujte pojmy souvislá množina a oblast.
(iii) Dokažte, že pokud potenciál existuje, na oblasti je dán jednoznačně až na aditivní konstantu. Potřebná pomocná tvrzení pouze formulujte.
(iv) Formulujte a dokažte nutnou podmínku potenciálnosti pro dostatečně hladké vektorové pole.
(v) Naznačte, že tato podmínka nemusí být postačující.
(vi) Formujte pojem integrační faktor a ukažte nutnou podmínku pro existenci integračního faktoru.