Matematická analýza II

Milan Pokorný

Přednáška 21.4.2022

Věta (V 5 O totálním diferenciálu složeného zobrazení V 12.1.19)

Nechť $\vec{f}\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^m$ má totální diferenciál v bodě $a \in \mathbb{R}^N$ a $\vec{g}\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ má totální diferenciál v bodě $\vec{f}(a)$. Pak funkce $\vec{g} \circ \vec{f}$ má totální diferenciál v bodě a a platí pro něj

$$\mathrm{d}(\vec{g} \circ \vec{f})(a) = \mathrm{d}\vec{g}(\vec{f}(a)) \circ \mathrm{d}\vec{f}(a)$$

(neboli $\mathrm{d}(\vec{g} \circ \vec{f})(a)(\mathbf{h}) = \mathrm{d}\vec{g}(\vec{f}(a))(\mathrm{d}\vec{f}(a)(\mathbf{h}))$ pro všechna $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^N$).

Věta (V 6 Řetízkové pravidlo V 12.1.20)

Nechť $\vec{f}\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^m$ má totální diferenciál v bodě $a \in \mathbb{R}^N$ a $\vec{g}\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ má totální diferenciál v bodě $\vec{f}(a)$. Pak pro každé $i \in \{1, \dots, N\}$ platí

$$\frac{\partial(\vec{g} \circ \vec{f})}{\partial x_i}(a) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \vec{g}}{\partial y_j}(\vec{f}(a))\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a).$$

11.1 Parciální derivace, derivace ve směru, totální diferenciál VI

Věta (V 5 O totálním diferenciálu složeného zobrazení V 12.1.19)

Nechť $\vec{f}\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^m$ má totální diferenciál v bodě $a \in \mathbb{R}^N$ a $\vec{g}\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ má totální diferenciál v bodě $\vec{f}(a)$. Pak funkce $\vec{g} \circ \vec{f}$ má totální diferenciál v bodě a a platí pro něj

$$\mathrm{d}(\vec{g} \circ \vec{f})(a) = \mathrm{d}\vec{g}(\vec{f}(a)) \circ \mathrm{d}\vec{f}(a)$$

(neboli $\mathrm{d}(\vec{g} \circ \vec{f})(a)(\mathbf{h}) = \mathrm{d}\vec{g}(\vec{f}(a))(\mathrm{d}\vec{f}(a)(\mathbf{h}))$ pro všechna $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^N$).

Věta (V 6 Řetízkové pravidlo V 12.1.20)

Nechť $\vec{f}\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^m$ má totální diferenciál v bodě $a \in \mathbb{R}^N$ a $\vec{g}\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ má totální diferenciál v bodě $\vec{f}(a)$. Pak pro každé $i \in \{1, \dots, N\}$ platí

$$\frac{\partial(\vec{g} \circ \vec{f})}{\partial x_i}(a) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \vec{g}}{\partial y_j}(\vec{f}(a)) \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a).$$

11.1 Parciální derivace, derivace ve směru, totální diferenciál VII

Definice (D 5 Konvexní množina D 12.1.25)

Řekneme, že množina $A \subset \mathbb{R}^N$ je *konvexní*, jestliže pro každá $x, y \in A$ a $\lambda \in [0, 1]$ platí $\lambda x + (1 - \lambda)y \in A$.

Věta (V 7 O střední hodnotě V 12.1.27)

Nechť $A \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená konvexní množina a $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ má totální diferenciál na A. Pak pro všechna $a, b \in A$, $a \neq b$, existuje $\theta \in (0, 1)$ takové, že

$$\begin{aligned} f(b) - f(a) &= \mathrm{d}f(a + \theta(b - a))(b - a) = \nabla f(a + \theta(b - a)) \cdot (b - a) \\ &= \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a + \theta(b - a))(b_j - a_j). \end{aligned}$$

Definice (D 5 Konvexní množina D 12.1.25)

Řekneme, že množina $A \subset \mathbb{R}^N$ je *konvexní*, jestliže pro každá $x, y \in A$ a $\lambda \in [0,1]$ platí $\lambda x + (1-\lambda)y \in A$.

Věta (V 7 O střední hodnotě V 12.1.27)

Nechť $A \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená konvexní množina a $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ má totální diferenciál na A. Pak pro všechna $a, b \in A$, $a \neq b$, existuje $\theta \in (0,1)$ takové, že

$$f(b) - f(a) = \mathrm{d}f(a + \theta(b-a))(b-a) = \nabla f(a + \theta(b-a)) \cdot (b-a)$$
$$= \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a + \theta(b-a))(b_j - a_j).$$

Definice (6 Derivace vyšších řádů)

Nechť $f : \mathcal{U}(a) \to \mathbb{R}$ má na okolí bodu a parciální derivace podle x_i. *Druhá parciální derivace* podle proměnných x_i a x_j je definována vztahem $\frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{\partial f}{\partial x_i})(a)$ (pokud má výraz smysl) a značí se $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$ nebo $f_{x_j x_i}(a)$. Pokud $i = j$, první verze zápisu se zkracuje na $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a)$. Pokud $i \neq j$, hovoříme o *smíšené parciální derivaci*. Analogicky pro vyšší parciální derivace a pro vektorové funkce.

Věta (8 O záměnnosti parciálních derivací V 12.2.2)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená množina a $f \in C^2(\Omega)$. Pak má f na Ω záměnné druhé parciální derivace.

Důsledek (1 Důsl. 12.2.3)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená a $f \in C^k(\Omega)$ pro $k \geq 2$. Pak jsou všechny parciální derivace k-tého řádu záměnné.

11.2 Derivace a totální diferenciály vyšších řádů. Taylorův vzorec I

Definice (6 Derivace vyšších řádů)

Nechť $f : \mathcal{U}(a) \to \mathbb{R}$ má na okolí bodu a parciální derivace podle x_i. *Druhá parciální derivace* podle proměnných x_i a x_j je definována vztahem $\frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{\partial f}{\partial x_i})(a)$ (pokud má výraz smysl) a značí se $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$ nebo $f_{x_j x_i}(a)$. Pokud $i = j$, první verze zápisu se zkracuje na $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a)$. Pokud $i \neq j$, hovoříme o *smíšené parciální derivaci*. Analogicky pro vyšší parciální derivace a pro vektorové funkce.

Věta (8 O záměnnosti parciálních derivací V 12.2.2)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená množina a $f \in C^2(\Omega)$. Pak má f na Ω záměnné druhé parciální derivace.

Důsledek (1 Důsl. 12.2.3)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená a $f \in C^k(\Omega)$ pro $k \geq 2$. Pak jsou všechny parciální derivace k-tého řádu záměnné.

11.2 Derivace a totální diferenciály vyšších řádů. Taylorův vzorec I

Definice (6 Derivace vyšších řádů)

Nechť $f : \mathcal{U}(a) \to \mathbb{R}$ má na okolí bodu a parciální derivace podle x_i. *Druhá parciální derivace* podle proměnných x_i a x_j je definována vztahem $\frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{\partial f}{\partial x_i})(a)$ (pokud má výraz smysl) a značí se $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$ nebo $f_{x_j x_i}(a)$. Pokud $i = j$, první verze zápisu se zkracuje na $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a)$. Pokud $i \neq j$, hovoříme o *smíšené parciální derivaci*. Analogicky pro vyšší parciální derivace a pro vektorové funkce.

Věta (8 O záměnnosti parciálních derivací V 12.2.2)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená množina a $f \in C^2(\Omega)$. Pak má f na Ω záměnné druhé parciální derivace.

Důsledek (1 Důsl. 12.2.3)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená a $f \in C^k(\Omega)$ pro $k \geq 2$. Pak jsou všechny parciální derivace k-tého řádu záměnné.

11.2 Derivace a totální diferenciály vyšších řádů. Taylorův vzorec II

Věta (9 Taylorův vzorec 12.2.4)

Nechť $a \in \mathbb{R}^N$, $\delta > 0$, $m \in \mathbb{N}$, $f \in C^{m+1}(\mathcal{U}_\delta(a))$ *a* $a + \mathbf{h} \in \mathcal{U}_\delta(a)$. *Pak existuje* $\theta \in (0,1)$ *takové, že*

$$f(a+\mathbf{h}) = f(a) + \sum_{i_1=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_{i_1}}(a) h_{i_1} + \frac{1}{2!} \sum_{i_1,i_2=1}^{N} \frac{\partial^2 f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2}}(a) h_{i_1} h_{i_2}$$

$$+ \cdots + \frac{1}{m!} \sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{N} \frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_m}}(a) h_{i_1} \ldots h_{i_m}$$

$$+ \frac{1}{(m+1)!} \sum_{i_1,\ldots,i_{m+1}=1}^{N} \frac{\partial^{m+1} f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_{m+1}}}(a + \theta\mathbf{h}) h_{i_1} \ldots h_{i_{m+1}}.$$

Definice (7 Totální diferenciál řádu k D 12.2.5)

Nechť $f \in C^k(\mathcal{U}_\delta(a))$. *Totálním diferenciálem* řádu k příslušejícím funkci f v bodě a nazýváme k-lineární funkci (zobrazuje $\mathbb{R}^{Nk}$ do $\mathbb{R}$)

$$\mathrm{d}^k f(a)(\mathbf{h}^1, \ldots, \mathbf{h}^k) = \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{N} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_k}}(a) h^1_{i_1} \ldots h^k_{i_k}.$$

11.2 Derivace a totální diferenciály vyšších řádů. Taylorův vzorec II

Věta (9 Taylorův vzorec 12.2.4)

Nechť $a \in \mathbb{R}^N$, $\delta > 0$, $m \in \mathbb{N}$, $f \in C^{m+1}(\mathcal{U}_\delta(a))$ *a* $a + \mathbf{h} \in \mathcal{U}_\delta(a)$. *Pak existuje* $\theta \in (0,1)$ *takové, že*

$$f(a+\mathbf{h}) = f(a) + \sum_{i_1=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_{i_1}}(a)h_{i_1} + \frac{1}{2!}\sum_{i_1,i_2=1}^{N} \frac{\partial^2 f}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}}(a)h_{i_1}h_{i_2}$$
$$+ \cdots + \frac{1}{m!}\sum_{i_1,\dots,i_m=1}^{N} \frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1}\dots\partial x_{i_m}}(a)h_{i_1}\dots h_{i_m}$$
$$+ \frac{1}{(m+1)!}\sum_{i_1,\dots,i_{m+1}=1}^{N} \frac{\partial^{m+1} f}{\partial x_{i_1}\dots\partial x_{i_{m+1}}}(a+\theta\mathbf{h})h_{i_1}\dots h_{i_{m+1}}.$$

Definice (7 Totální diferenciál řádu k D 12.2.5)

Nechť $f \in C^k(\mathcal{U}_\delta(a))$. *Totálním diferenciálem* řádu k příslušejícím funkci f v bodě a nazýváme k-lineární funkci (zobrazuje $\mathbb{R}^{Nk}$ do $\mathbb{R}$)

$$\mathrm{d}^k f(a)(\mathbf{h}^1,\dots,\mathbf{h}^k) = \sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{N} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\dots\partial x_{i_k}}(a)h^1_{i_1}\dots h^k_{i_k}.$$

Definice (8 Multiindex D 12.2.6)

Nechť $N \in \mathbb{N}$ je pevné. *Multiindexem* nazýváme N-tici nezáporných celých čísel $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$. Číslo

$$|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_N$$

se nazývá *výška multiindexu*. Pro multiindex α, $f \in C^{|\alpha|}(\Omega)$ a $x \in \mathbb{R}^N$ zavádíme značení

$$D^\alpha f := \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_N^{\alpha_N}}, \qquad x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \dots x_N^{\alpha_N} \qquad \text{a} \qquad \binom{|\alpha|}{\alpha} = \frac{|\alpha|!}{\alpha_1! \dots \alpha_N!}.$$

Definice (9 Potenciál vektorového pole D 12.3.1)

Vektorové pole $\mathbf{T} = (T_1, \dots, T_N) \colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ nazýváme *potenciální* na otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, jestliže existuje funkce $U \colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ taková, že

$$\frac{\partial U}{\partial x_i} = T_i \qquad \text{na } \Omega \text{ pro všechna } i \in \{1, \dots, N\}.$$

Funkci U pak nazýváme *potenciálem* vektorového pole $\mathbf{T}$.

Definice (10 Souvislá množina 12.3.2)

Množina $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ se nazývá *souvislá*, jestliže každé její dva body lze spojit lomenou čarou tvořenou konečným počtem úseček, které celé leží v Ω. Množina $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ se nazývá *oblast*, je-li otevřená a souvislá.

11.3 Potenciál vektorového pole I

Definice (9 Potenciál vektorového pole D 12.3.1)

Vektorové pole $\mathbf{T} = (T_1, \ldots, T_N) \colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ nazýváme *potenciální* na otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, jestliže existuje funkce $U \colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ taková, že

$$\frac{\partial U}{\partial x_i} = T_i \qquad \text{na } \Omega \text{ pro všechna } i \in \{1, \ldots, N\}.$$

Funkci U pak nazýváme *potenciálem* vektorového pole $\mathbf{T}$.

Definice (10 Souvislá množina 12.3.2)

Množina $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ se nazývá *souvislá*, jestliže každé její dva body lze spojit lomenou čarou tvořenou konečným počtem úseček, které celé leží v Ω. Množina $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ se nazývá *oblast*, je-li otevřená a souvislá.

11.3 Potenciál vektorového pole II

Věta (10 O nejednoznačnosti potenciálu na oblasti V 12.3.3)

Nechť vektorové pole $\mathbf{T}$ *má na oblasti* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *potenciály* U_1 *a* U_2*. Pak existuje* $C \in \mathbb{R}$ *takové, že* $U_2 = U_1 + C$*.*

Věta (11 Nutná podmínka existence potenciálu V 12.3.5)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *je otevřená množina a* $\mathbf{T} \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^N)$*. Má-li* $\mathbf{T}$ *potenciál na* Ω*, pak platí*

$$\frac{\partial T_i}{\partial x_j} = \frac{\partial T_j}{\partial x_i} \qquad \text{na } \Omega \qquad \text{pro všechna } i, j \in \{1, \ldots, N\}.$$

Věta (12 Postačující podmínka existence potenciálu V 12.3.6)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *je otevřený interval (tedy kvádr v případě omezenosti),* $\mathbf{T} \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^N)$ *a*

$$\frac{\partial T_i}{\partial x_j} = \frac{\partial T_j}{\partial x_i} \qquad \text{na } \Omega \qquad \text{pro všechna } i, j \in \{1, \ldots, N\}.$$

Pak má vektorové pole $\mathbf{T}$ *potenciál na* Ω*.*

11.3 Potenciál vektorového pole II

Věta (10 O nejednoznačnosti potenciálu na oblasti V 12.3.3)

Nechť vektorové pole $\mathbf{T}$ *má na oblasti* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *potenciály* U_1 *a* U_2*. Pak existuje* $C \in \mathbb{R}$ *takové, že* $U_2 = U_1 + C$*.*

Věta (11 Nutná podmínka existence potenciálu V 12.3.5)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *je otevřená množina a* $\mathbf{T} \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^N)$*. Má-li* $\mathbf{T}$ *potenciál na* Ω*, pak platí*

$$\frac{\partial T_i}{\partial x_j} = \frac{\partial T_j}{\partial x_i} \qquad \text{na } \Omega \qquad \text{pro všechna } i, j \in \{1, \dots, N\}.$$

Věta (12 Postačující podmínka existence potenciálu V 12.3.6)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *je otevřený interval (tedy kvádr v případě omezenosti),* $\mathbf{T} \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^N)$ *a*

$$\frac{\partial T_i}{\partial x_j} = \frac{\partial T_j}{\partial x_i} \qquad \text{na } \Omega \qquad \text{pro všechna } i, j \in \{1, \dots, N\}.$$

Pak má vektorové pole $\mathbf{T}$ *potenciál na* Ω*.*

11.3 Potenciál vektorového pole II

Věta (10 O nejednoznačnosti potenciálu na oblasti V 12.3.3)

Nechť vektorové pole $\mathbf{T}$ *má na oblasti* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *potenciály* U_1 *a* U_2. *Pak existuje* $C \in \mathbb{R}$ *takové, že* $U_2 = U_1 + C$.

Věta (11 Nutná podmínka existence potenciálu V 12.3.5)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *je otevřená množina a* $\mathbf{T} \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^N)$. *Má-li* $\mathbf{T}$ *potenciál na* Ω, *pak platí*

$$\frac{\partial T_i}{\partial x_j} = \frac{\partial T_j}{\partial x_i} \qquad \text{na } \Omega \qquad \text{pro všechna } i, j \in \{1, \dots, N\}.$$

Věta (12 Postačující podmínka existence potenciálu V 12.3.6)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *je otevřený interval (tedy kvádr v případě omezenosti),* $\mathbf{T} \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^N)$ *a*

$$\frac{\partial T_i}{\partial x_j} = \frac{\partial T_j}{\partial x_i} \qquad \text{na } \Omega \qquad \text{pro všechna } i, j \in \{1, \dots, N\}.$$

Pak má vektorové pole $\mathbf{T}$ *potenciál na* Ω.