Matematická analýza II

Milan Pokorný

Přednáška 20.4.2022

11 Diferenciální počet funkcí více proměnných

11.1 Parciální derivace, derivace ve směru, totální diferenciál I

Definice (1 Parciální derivace D 12.1.1)

Nechť $a \in \mathbb{R}^N$, $i \in \{1, \dots, N\}$ a $f\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ je definována na množině $\{a_1\} \times \dots \times \{a_{i-1}\} \times (a_i - \delta, a_i + \delta) \times \{a_{i+1}\} \times \dots \times \{a_N\}$ pro jisté $\delta > 0$. Jestliže existuje vlastní limita

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + h, a_{i+1}, \dots, a_N) - f(a)}{h},$$

pak se nazývá *parciální derivace* funkce f podle i-té proměnné v bodě a a značí se $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ nebo $f_{x_i}(a)$.

Definice (2 Derivace ve směru D 12.1.5)

Nechť vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^N$, bod $a \in \mathbb{R}^N$ a funkce $f\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ je definovaná na množině $\{a + h\mathbf{v}\colon h \in (-\delta, \delta)\}$ pro jisté $\delta > 0$. Pak definujeme *derivaci* funkce f *ve směru* $\mathbf{v}$ v bodě a předpisem

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(a) := \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h\mathbf{v}) - f(a)}{h},$$

pokud limita na pravé straně existuje a je vlastní.

11 Diferenciální počet funkcí více proměnných

11.1 Parciální derivace, derivace ve směru, totální diferenciál I

Definice (1 Parciální derivace D 12.1.1)

Nechť $a \in \mathbb{R}^N$, $i \in \{1, \dots, N\}$ a $f\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ je definována na množině $\{a_1\} \times \cdots \times \{a_{i-1}\} \times (a_i - \delta, a_i + \delta) \times \{a_{i+1}\} \times \cdots \times \{a_N\}$ pro jisté $\delta > 0$. Jestliže existuje vlastní limita

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + h, a_{i+1}, \dots, a_N) - f(a)}{h},$$

pak se nazývá *parciální derivace* funkce f podle i-té proměnné v bodě a a značí se $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ nebo $f_{x_i}(a)$.

Definice (2 Derivace ve směru D 12.1.5)

Nechť vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^N$, bod $a \in \mathbb{R}^N$ a funkce $f\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ je definovaná na množině $\{a + h\mathbf{v}\colon h \in (-\delta, \delta)\}$ pro jisté $\delta > 0$. Pak definujeme *derivaci* funkce f *ve směru* $\mathbf{v}$ v bodě a předpisem

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(a) := \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h\mathbf{v}) - f(a)}{h},$$

pokud limita na pravé straně existuje a je vlastní.

11.1 Parciální derivace, derivace ve směru, totální diferenciál II

Definice (3 Gradient D 12.1.10)

Nechť $f\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^N$ a existují všechny parciální derivace funkce f v bodě a. Pak *gradient* funkce f v bodě a je definován předpisem

$$\nabla f(a) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_N}(a)\right).$$

Analogicky pro $\vec{f}\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^m$ zavádíme gradient

$$\nabla \vec{f}(a) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_N}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_N}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_N}(a) \end{pmatrix},$$

existují-li jednotlivé parciální derivace. Vektorová funkce $\vec{f}\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^m$ je třídy $C^k(\Omega; \mathbb{R}^m)$ pro $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$, jsou-li všechny její složky třídy $C^k(\Omega)$. Vždy se zkracuje $C^k(\Omega; \mathbb{R}^1)$ na $C^k(\Omega)$, $C^0(\Omega; \mathbb{R}^m)$ na $C(\Omega; \mathbb{R}^m)$.

Definice (4 Totální diferenciál D 12.1.11)

Nechť $f\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ je definovaná na nějakém okolí bodu $a \in \mathbb{R}^N$. Řekneme, že funkce f má v bodě a *totální diferenciál*, jestliže existuje taková lineární funkce $L\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, že

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{f(x+\mathbf{h}) - f(x) - L\mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|} = 0.$$

Uvedenou lineární funkci L nazýváme totálním diferenciálem funkce f v bodě a a značíme ji $\mathrm{d}f(a)$.

Věta (1 Spojitost ve směru)

Nechť $f\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ má v bodě a derivaci ve směru $\mathbf{v}$. Potom

$$\lim_{h\to 0} f(a+h\mathbf{v}) = f(a),$$

tedy funkce f je spojitá v bodě a ve směru $\mathbf{v}$. Analogicky pro vektorové funkce.

Definice (4 Totální diferenciál D 12.1.11)

Nechť $f\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ je definovaná na nějakém okolí bodu $a \in \mathbb{R}^N$. Řekneme, že funkce f má v bodě a *totální diferenciál*, jestliže existuje taková lineární funkce $L\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, že

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{f(x+\mathbf{h}) - f(x) - L\mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|} = 0.$$

Uvedenou lineární funkci L nazýváme totálním diferenciálem funkce f v bodě a a značíme ji $\mathrm{d}f(a)$.

Věta (1 Spojitost ve směru)

Nechť $f\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ má v bodě a derivaci ve směru $\mathbf{v}$. Potom

$$\lim_{h\to 0} f(a+h\mathbf{v}) = f(a),$$

tedy funkce f je spojitá v bodě a ve směru $\mathbf{v}$. Analogicky pro vektorové funkce.

Věta (2 O vlastnostech plynoucích z existence totálního diferenciálu V 12.1.13)

Nechť $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ má totální diferenciál v bodě $a \in \mathbb{R}^N$. Pak
(i) *v bodě a existují všechny parciální derivace a platí $\mathrm{d}f(a) = \nabla f(a)$ (přesněji $\mathrm{d}f(a)(\mathbf{h}) = \nabla f(a) \cdot \mathbf{h}$ pro všechna $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^N$)*
(ii) *existují derivace ve všech směrech a platí pro ně $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(a) = \nabla f(a) \cdot \mathbf{v}$*
(iii) *funkce f je spojitá v bodě a.*

Věta (3 O postačující podmínce pro existenci totálního diferenciálu V 12.1.16)

Nechť $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ a $a \in \mathbb{R}^N$.
(i) *Má-li f na jistém okolí bodu a omezené parciální derivace, pak je v něm spojitá.*
(ii) *Má-li f na jistém okolí bodu a parciální derivace a ty jsou spojité v bodě a, pak v něm má totální diferenciál.*

11.1 Parciální derivace, derivace ve směru, totální diferenciál IV

Věta (2 O vlastnostech plynoucích z existence totálního diferenciálu V 12.1.13)

Nechť $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ *má totální diferenciál v bodě* $a \in \mathbb{R}^N$*. Pak*
(i) *v bodě* a *existují všechny parciální derivace a platí* $\mathrm{d}f(a) = \nabla f(a)$ *(přesněji* $\mathrm{d}f(a)(\mathbf{h}) = \nabla f(a) \cdot \mathbf{h}$ *pro všechna* $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^N$*)*
(ii) *existují derivace ve všech směrech a platí pro ně* $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(a) = \nabla f(a) \cdot \mathbf{v}$
(iii) *funkce* f *je spojitá v bodě* a*.*

Věta (3 O postačující podmínce pro existenci totálního diferenciálu V 12.1.16)

Nechť $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ *a* $a \in \mathbb{R}^N$*.*
(i) *Má-li* f *na jistém okolí bodu* a *omezené parciální derivace, pak je v něm spojitá.*
(ii) *Má-li* f *na jistém okolí bodu* a *parciální derivace a ty jsou spojité v bodě* a*, pak v něm má totální diferenciál.*

Věta (4 Aritmetika totálního diferenciálu T 12.1.18)

Nechť $f, g\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^N$ *a existují totální diferenciály* $\mathrm{d}f(a)$ *a* $\mathrm{d}g(a)$. *Pak*
(i) $\mathrm{d}(f+g)(a) = \mathrm{d}f(a) + \mathrm{d}g(a)$
(ii) $\mathrm{d}(fg)(a) = g(a)\mathrm{d}f(a) + f(a)\mathrm{d}g(a)$
(iii) *pokud navíc* $g(a) \neq 0$, *pak* $\mathrm{d}\frac{f}{g}(a) = \frac{g(a)\mathrm{d}f(a) - f(a)\mathrm{d}g(a)}{g^2(a)}$.

Věta (5 O totálním diferenciálu složeného zobrazení V 12.1.19)

Nechť $\vec{f}\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^m$ *má totální diferenciál v bodě* $a \in \mathbb{R}^N$ *a* $\vec{g}\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ *má totální diferenciál v bodě* $\vec{f}(a)$. *Pak funkce* $\vec{g} \circ \vec{f}$ *má totální diferenciál v bodě* a *a platí pro něj*

$$\mathrm{d}(\vec{g} \circ \vec{f})(a) = \mathrm{d}\vec{g}(\vec{f}(a)) \circ \mathrm{d}\vec{f}(a)$$

(neboli $\mathrm{d}(\vec{g} \circ \vec{f})(a)(\mathbf{h}) = \mathrm{d}\vec{g}(\vec{f}(a))(\mathrm{d}\vec{f}(a)(\mathbf{h}))$ *pro všechna* $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^N$*).*

Věta (4 Aritmetika totálního diferenciálu T 12.1.18)

Nechť $f, g \colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^N$ *a existují totální diferenciály* $\mathrm{d}f(a)$ *a* $\mathrm{d}g(a)$. *Pak*
(i) $\mathrm{d}(f+g)(a) = \mathrm{d}f(a) + \mathrm{d}g(a)$
(ii) $\mathrm{d}(fg)(a) = g(a)\mathrm{d}f(a) + f(a)\mathrm{d}g(a)$
(iii) *pokud navíc* $g(a) \neq 0$, *pak* $\mathrm{d}\frac{f}{g}(a) = \frac{g(a)\mathrm{d}f(a) - f(a)\mathrm{d}g(a)}{g^2(a)}$.

Věta (5 O totálním diferenciálu složeného zobrazení V 12.1.19)

Nechť $\vec{f} \colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^m$ *má totální diferenciál v bodě* $a \in \mathbb{R}^N$ *a* $\vec{g} \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ *má totální diferenciál v bodě* $\vec{f}(a)$. *Pak funkce* $\vec{g} \circ \vec{f}$ *má totální diferenciál v bodě a a platí pro něj*

$$\mathrm{d}(\vec{g} \circ \vec{f})(a) = \mathrm{d}\vec{g}(\vec{f}(a)) \circ \mathrm{d}\vec{f}(a)$$

(neboli $\mathrm{d}(\vec{g} \circ \vec{f})(a)(\mathbf{h}) = \mathrm{d}\vec{g}(\vec{f}(a))(\mathrm{d}\vec{f}(a)(\mathbf{h}))$ *pro všechna* $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^N$*).*