Matematická analýza II

Milan Pokorný

Přednáška 24.3.2022

9.2 Vztah mezi mocninnými a Taylorovými řadami I

Definice (2 Taylorova řada D 10.2.1)

Nechť $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je nekonečněkrát diferencovatelná v $x_0 \in \mathbb{R}$. Pak řadu

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

nazveme *Taylorovou řadou* funkce f v bodě x_0.

Věta (5 O vztahu mocninných a Taylorových řad V 10.2.3)

Nechť $\{a_k\} \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ a existuje $\delta > 0$ takové, že mocninná řada $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ konverguje na $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Pak je Taylorovou řadou svého součtu v bodě x_0.

9.2 Vztah mezi mocninnými a Taylorovými řadami I

Definice (2 Taylorova řada D 10.2.1)

Nechť $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je někonečněkrát diferencovatelná v $x_0 \in \mathbb{R}$. Pak řadu

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

nazveme *Taylorovou řadou* funkce f v bodě x_0.

Věta (5 O vztahu mocninných a Taylorových řad V 10.2.3)

Nechť $\{a_k\} \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ a existuje $\delta > 0$ takové, že mocninná řada $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$ konverguje na $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Pak je Taylorovou řadou svého součtu v bodě x_0.

9.2 Vztah mezi mocninnými a Taylorovými řadami II

Definice (3 Reálně analytické funkce D 10.2.6)

Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval a $f : I \to \mathbb{R}$. Řekneme, že f je *reálně analytická* na I, jestliže se dá na okolí každého bodu I vyjádřit Taylorovou řadou se středem v tomto bodě.

Věta (6 Aritmetika Taylorových řad V 10.2.5)

Nechť posloupnosti $\{a_k\}, \{b_k\} \subset \mathbb{R}$ *a mocninné řady* $f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *a* $g(x) := \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ *konvergují na jistém okolí počátku. Pak existuje okolí počátku, kde platí*

(i) $(f+g)(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(a_k + b_k)x^k$

(ii) $(fg)(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(\sum_{m=0}^{k} a_m b_{k-m})x^k$

(iii) *jestliže* $b_0 \neq 0$*, pak* $\frac{f(x)}{g(x)} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$*, kde* $a_k = \sum_{m=0}^{\infty} c_m b_{k-m}$

(iv) *jestliže* $a_0 = 0$*, pak* $g(f(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k)^n = \sum_{m=1}^{\infty} d_m x^m$*, kde*

$$d_m = \sum_{n=0}^{m} b_n \sum_{\substack{k_1, k_2, \dots, k_n \in \mathbb{N} \\ k_1 + k_2 + \dots + k_n = m}} a_{k_1} a_{k_2} \dots a_{k_n}.$$

9.2 Vztah mezi mocninnými a Taylorovými řadami II

Definice (3 Reálně analytické funkce D 10.2.6)

Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval a $f\colon I \to \mathbb{R}$. Řekneme, že f je *reálně analytická* na I, jestliže se dá na okolí každého bodu I vyjádřit Taylorovou řadou se středem v tomto bodě.

Věta (6 Aritmetika Taylorových řad V 10.2.5)

Nechť posloupnosti $\{a_k\}, \{b_k\} \subset \mathbb{R}$ *a mocninné řady* $f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *a* $g(x) := \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ *konvergují na jistém okolí počátku. Pak existuje okolí počátku, kde platí*

(i) $(f+g)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) x^k$

(ii) $(fg)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (\sum_{m=0}^{k} a_m b_{k-m}) x^k$

(iii) *jestliže* $b_0 \neq 0$, *pak* $\frac{f(x)}{g(x)} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$, *kde* $a_k = \sum_{m=0}^{\infty} c_m b_{k-m}$

(iv) *jestliže* $a_0 = 0$, *pak* $g(f(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k)^n = \sum_{m=1}^{\infty} d_m x^m$, *kde*

$$d_m = \sum_{n=0}^{m} b_n \sum_{\substack{k_1, k_2, \dots, k_n \in \mathbb{N} \\ k_1 + k_2 + \dots + k_n = m}} a_{k_1} a_{k_2} \dots a_{k_n}.$$

9.2 Vztah mezi mocninnými a Taylorovými řadami III

Věta (7 Abelova věta V 10.2.10)

Nechť $\{a_k\} \subset \mathbb{C}$ *a příslušná mocninná řada* $f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ *má poloměr konvergence* $R \in (0, \infty)$*. Je-li* $\varphi \in [0, 2\pi)$ *takové, že pro* $z = R\mathrm{e}^{i\varphi}$ *konverguje řada* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$*, pak* $t \mapsto f(t\mathrm{e}^{i\varphi})$ *je spojitá na* $[0, R]$*.*

Věta (2.21 O funkcích sin a cos V 10.4.1)

Existují právě dvě funkce $\sin, \cos\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *a jediné iracionální číslo* π *tak, že platí*

(1) $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}$
(2) $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}$
(3) $\sin(-x) = -\sin x$ *a* $\cos(-x) = \cos x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$
(4) $\sin$ *je rostoucí na* $[0, \frac{\pi}{2}]$
(5) $\sin 0 = 0$ *a* $\sin \frac{\pi}{2} = 1$
(6) $\sin'(0) = 1$.

Věta (2.22 O exponenciále V 10.4.2)

Existuje právě jedna funkce $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *taková, že*

(13) $\exp(z_1 + z_2) = \exp z_1 \exp z_2 \qquad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$
(14) $\exp(x + iy) = \exp x(\cos y + i \sin y) \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}$
(15) $\exp 0 = 1$
(16) *restrikce funkce* $\exp$ *na* $\mathbb{R}$ *splňuje* $\exp' x = \exp x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$.
(17) *restrikce funkce* $\exp$ *na* $\mathbb{R}$ *(reálná funkce) je rostoucí a jejím oborem hodnot je* $(0, \infty)$

9.3 Zavedení funkcí sin, cos a exp I

Věta (2.21 O funkcích sin a cos V 10.4.1)

Existují právě dvě funkce $\sin, \cos\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *a jediné iracionální číslo* π *tak, že platí*

(1) $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}$
(2) $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}$
(3) $\sin(-x) = -\sin x$ *a* $\cos(-x) = \cos x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$
(4) $\sin$ *je rostoucí na* $[0, \frac{\pi}{2}]$
(5) $\sin 0 = 0$ *a* $\sin \frac{\pi}{2} = 1$
(6) $\sin'(0) = 1$.

Věta (2.22 O exponenciále V 10.4.2)

Existuje právě jedna funkce $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *taková, že*

(13) $\exp(z_1 + z_2) = \exp z_1 \exp z_2 \qquad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$
(14) $\exp(x + \mathrm{i}y) = \exp x(\cos y + \mathrm{i} \sin y) \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}$
(15) $\exp 0 = 1$
(16) *restrikce funkce* $\exp$ *na* $\mathbb{R}$ *splňuje* $\exp' x = \exp x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$.
(17) *restrikce funkce* $\exp$ *na* $\mathbb{R}$ *(reálná funkce) je rostoucí a jejím oborem hodnot je* $(0, \infty)$