Matematická analýza II

Milan Pokorný

Přednáška 17.3.2022

Definice (3 Přerovnání řady D 9.4.1)

Nechť $\{a_k\} \subset \mathbb{R}$ a $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je bijekce. Pak řadu $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)}$ nazveme *přerovnáním* řady $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ (odpovídajícím bijekci φ).

Definice (4 Kladná a záporná část D 9.4.2)

Nechť $x \in \mathbb{R}$. *Kladnou část* čísla x definujeme jako $x^+ := \max\{x, 0\}$ a *zápornou část* jako $x^- := \max\{-x, 0\}$.

Lemma (2 Charakterizace absolutní a neabsolutní konvergence V 9.4.4)

Nechť $\{a_k\} \subset \mathbb{R}$. *Pak*

(i) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konverguje absolutně* $\iff \sum_{k=1}^{\infty} a_k^+$ *a* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^-$ *konvergují.*

(ii) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konverguje neabsolutně* $\implies \sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^- = \infty$.

Definice (3 Přerovnání řady D 9.4.1)

Nechť $\{a_k\} \subset \mathbb{R}$ a $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je bijekce. Pak řadu $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)}$ nazveme *přerovnáním* řady $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ (odpovídajícím bijekci φ).

Definice (4 Kladná a záporná část D 9.4.2)

Nechť $x \in \mathbb{R}$. *Kladnou část* čísla x definujeme jako $x^+ := \max\{x, 0\}$ a *zápornou část* jako $x^- := \max\{-x, 0\}$.

Lemma (2 Charakterizace absolutní a neabsolutní konvergence V 9.4.4)

Nechť $\{a_k\} \subset \mathbb{R}$. *Pak*
(i) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konverguje absolutně* $\iff \sum_{k=1}^{\infty} a_k^+$ *a* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^-$ *konvergují.*
(ii) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konverguje neabsolutně* $\implies \sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^- = \infty$.

8.4 Přerovnání řad a součin řad I

Definice (3 Přerovnání řady D 9.4.1)

Nechť $\{a_k\} \subset \mathbb{R}$ a $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je bijekce. Pak řadu $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)}$ nazveme *přerovnáním* řady $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ (odpovídajícím bijekci φ).

Definice (4 Kladná a záporná část D 9.4.2)

Nechť $x \in \mathbb{R}$. *Kladnou část* čísla x definujeme jako $x^+ := \max\{x, 0\}$ a *zápornou část* jako $x^- := \max\{-x, 0\}$.

Lemma (2 Charakterizace absolutní a neabsolutní konvergence V 9.4.4)

Nechť $\{a_k\} \subset \mathbb{R}$. *Pak*
(i) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konverguje absolutně* $\iff \sum_{k=1}^{\infty} a_k^+$ *a* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^-$ *konvergují.*
(ii) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konverguje neabsolutně* $\implies \sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^- = \infty$.

Věta (15 O přerovnání absolutně konvergentní řady V 9.4.6)

Nechť $\{a_k\} \subset \mathbb{R}$ a řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje absolutně. Pak každé její přerovnání konverguje absolutně a má stejný součet.

Věta (16 Riemannova věta o přerovnání neabsolutně konvergentní řady V 9.4.7)

Nechť $\{a_k\} \subset \mathbb{R}$ a řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje neabsolutně. Pak pro každé $S \in \mathbb{R}^*$ existuje přerovnání řady $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ se součtem S.

Věta (15 O přerovnání absolutně konvergentní řady V 9.4.6)

Nechť $\{a_k\} \subset \mathbb{R}$ *a řada* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konverguje absolutně. Pak každé její přerovnání konverguje absolutně a má stejný součet.*

Věta (16 Riemannova věta o přerovnání neabsolutně konvergentní řady V 9.4.7)

Nechť $\{a_k\} \subset \mathbb{R}$ *a řada* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konverguje neabsolutně. Pak pro každé* $S \in \mathbb{R}^*$ *existuje přerovnání řady* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *se součtem* S*.*

Definice (5 Zobecněná řada a její konvergence D 9.4.8)

Nechť M je spočetná množina (existuje bijekce mezi M a $\mathbb{N}$). Řekneme, že *zobecněná řada* $\sum_{m\in M} a_m$ konverguje, jestliže existuje taková bijekce $\varphi\colon \mathbb{N}\to M$, že $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)}$ je absolutně konvergentní. Pak definujeme $\sum_{m\in M} a_m := \sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)}$.

Věta (17 Cauchyova věta o součinu řad V 9.4.12)

Nechť $\{a_k\},\{b_k\}\subset\mathbb{R}$ a nechť řady $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ a $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergují absolutně. Pak je řada $\sum_{i,j=1}^{\infty} a_i b_j$ absolutně konvergentní a platí

$$\sum_{i,j=1}^{\infty} a_i b_j = \Big(\sum_{k=1}^{\infty} a_k\Big)\Big(\sum_{k=1}^{\infty} b_k\Big).$$

Definice (5 Zobecněná řada a její konvergence D 9.4.8)

Nechť M je spočetná množina (existuje bijekce mezi M a $\mathbb{N}$). Řekneme, že *zobecněná řada* $\sum_{m\in M} a_m$ konverguje, jestliže existuje taková bijekce $\varphi\colon \mathbb{N} \to M$, že $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)}$ je absolutně konvergentní. Pak definujeme $\sum_{m\in M} a_m := \sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)}$.

Věta (17 Cauchyova věta o součinu řad V 9.4.12)

Nechť $\{a_k\}, \{b_k\} \subset \mathbb{R}$ a nechť řady $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ a $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergují absolutně. Pak je řada $\sum_{i,j=1}^{\infty} a_i b_j$ absolutně konvergentní a platí

$$\sum_{i,j=1}^{\infty} a_i b_j = \Big(\sum_{k=1}^{\infty} a_k\Big)\Big(\sum_{k=1}^{\infty} b_k\Big).$$

Definice (6 Cesarovská sčítatelnost D 9.5.5)

Nechť $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$. Pro všechna $n \in \mathbb{N}$ definujme $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ a $\sigma_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} S_k$. Řekneme, že $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ je *cesarovsky sčítatelná*, jestliže $\lim_{n\to\infty} \sigma_n \in \mathbb{R}$. Číslo $A := \lim_{n\to\infty} \sigma_n$ pak nazveme *cesarovským součtem* řady $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ a píšeme $(C,1) \sum_{k=1}^{\infty} a_k = A$.

Věta (18 O konvergenci aritmetických průměrů)

Má-li řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ součet S (vlastní, nebo nevlastní), potom je též césarovsky sčítatelná a má součet $(C,1)$ také S.

8.5 Metoda aritmetických průměrů a césarovské součty I

Definice (6 Cesarovská sčítatelnost D 9.5.5)

Nechť $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$. Pro všechna $n \in \mathbb{N}$ definujme $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ a $\sigma_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} S_k$. Řekneme, že $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ je *cesarovsky sčítatelná*, jestliže $\lim_{n\to\infty} \sigma_n \in \mathbb{R}$. Číslo $A := \lim_{n\to\infty} \sigma_n$ pak nazveme *cesarovským součtem* řady $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ a píšeme $(C, 1) \sum_{k=1}^{\infty} a_k = A$.

Věta (18 O konvergenci aritmetických průměrů)

Má-li řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ součet S (vlastní, nebo nevlastní), potom je též césarovsky sčítatelná a má součet $(C, 1)$ také S.

Definice (1 Mocninná řada D 10.1.1)

Nechť $\{a_n\} \subset \mathbb{C}$ a $z_0 \in \mathbb{C}$. Pak řadu

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k jemocn$$

nazýváme *mocninnou řadou* se *středem* z_0. Čísla a_k nazýváme *koeficienty* mocninné řady.

Věta (1 Absolutní konvergence mocninné řady)

Nechť $\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k$ *je mocninná řada. Nechť existuje* $z_1 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *takové, že řada* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k z_1^k$ *konverguje. Potom pro všechna* $z \in \mathbb{C}$, $|z| < |z_1|$ *řada* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k$ *konverguje absolutně.*

Definice (1 Mocninná řada D 10.1.1)

Nechť $\{a_n\} \subset \mathbb{C}$ a $z_0 \in \mathbb{C}$. Pak řadu

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k jemocn$$

nazýváme *mocninnou řadou* se *středem* z_0. Čísla a_k nazýváme *koeficienty* mocninné řady.

Věta (1 Absolutní konvergence mocninné řady)

Nechť $\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k$ je mocninná řada. Nechť existuje $z_1 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ takové, že řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k z_1^k$ konverguje. Potom pro všechna $z \in \mathbb{C}$, $|z| < |z_1|$ řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k$ konverguje absolutně.

Věta (2 O konvergenci mocninné řady V 10.1.3)

Nechť $\{a_k\} \subset \mathbb{C}$. *Položme*

$$R := \frac{1}{\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}} \qquad s\ konvencí\ \frac{1}{0} = \infty\ a\ \frac{1}{\infty} = 0.$$

Pak

(i) *řada* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ *konverguje absolutně na* B_R

(ii) *řada* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ *nekonverguje na* $\{z \in \mathbb{C} \colon |z| > R\}$

(iii) *existuje-li* $\lim_{k\to\infty} |\frac{a_k}{a_{k+1}}|$, *pak se rovná* R

(iv) *existuje-li* $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$, *pak se rovná* $\frac{1}{R}$.