

Funkce více proměnných

Vázané extrémny

Nalezněte extrémny dané funkce vzhledem k vazbě

1. xy ; $x + y = 1$

2. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b}$; $x^2 + y^2 = 1$

3. $x^2 + y^2$; $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

4. $x^m y^n z^p$; $x + y + z = a$, $m, n, p, a > 0$

5. $\sin x \sin y \sin z$; $x + y + z = \frac{\pi}{2}$, $x, y, z > 0$

6. $\sum_{i=1}^n x_i^p$; $\sum_{i=1}^n x_i = a$, $p > 1, a \geq 0$.

Nalezněte největší a nejmenší hodnotu funkce na uvedené množině

7. $x - 2y - 3$; $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x + y \leq 1$

8. $x^2 - xy + y^2$; $|x| + |y| \leq 1$

9. $x^2 + y^2 - 12x + 16y$; $x^2 + y^2 \leq 25$

10. $x + y + z$; $x^2 + y^2 \leq z \leq 1$.

11. Při jakých rozměrech má kvádr daného objemu nejmenší povrch?

12. Do daného kužele vepište hranol o n -úhelníkové podstavě, který má maximální objem.

13. Najděte vzdálenost bodu (p, q, r) od roviny $ax + by + cz + d = 0$.

14. Najděte vzdálenost d dvou mimoběžek

$$\begin{array}{ll} x = X_1 + at & x = X_2 + pt \\ y = Y_1 + bt & y = Y_2 + qt \\ z = Z_1 + ct & z = Z_2 + rt. \end{array}$$

15. Pomocí hledání vázaných extrémů dokažte
- AG nerovnost $\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot \dots \cdot a_n}$, $a_i \geq 0$
 - Hölderovu nerovnost $\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq (\sum_{i=1}^n x_i^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{i=1}^n y_i^q)^{\frac{1}{q}}$, $x_i, y_i \geq 0$, $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
16. V počátku kartézských souřadnic je umístěn bodový náboj Q .
- Jaké bodové náboje Q_A, Q_B, Q_C musíme umístit do bodů $A = (3, 0, 0)$, $B = (0, 3, 0)$, $C = (0, 0, 4)$, aby náboj q v bodě $(1, 1, 1)$ byl v rovnováze.
 - Bude tato rovnováha stabilní?

Věta o regulárním zobrazení

17. Vyřešte rovnici $(z_y)^2 z_{xx} - 2z_x z_y z_{xy} + (z_x)^2 z_{yy} = 0$ tím, že položíte $x = u$, $y = v$, $z = w$ a přepíšete ji na rovnici pro funkci u proměnných v a w .
18. Vyjádřete první složku f_x vektoru $\nabla f = (f_x, f_y, f_z)$ ve sférických souřadnicích $x = r \sin \theta \cos \varphi$, $y = r \sin \theta \sin \varphi$, $z = r \cos \theta$.

Přepište do nových proměnných

19. $x^2 z_x + y^2 z_y = z^2$, $u = x$, $v = \frac{1}{y} - \frac{1}{x}$, $w = \frac{1}{z} - \frac{1}{x}$
20. $z_{xx} + z_{yy} = 0$, $u = \frac{x}{x^2 + y^2}$, $v = -\frac{y}{x^2 + y^2}$
21. $x^2 z_{xx} - (x^2 + y^2) z_{xy} + y^2 z_{yy} = 0$, $u = x + y$, $v = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$.