

## Funkce více proměnných

### Lokální extrémy funkcí více proměnných

Hledejte lokální extrémy následujících funkcí

1.  $x^2 + y^2$ ;  $x^2 - y^2$ ;  $-x^2 - y^2$

2.  $x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$

3.  $(x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}$

4.  $(2x^2 - xy + y^2/3 - 5x + 5y/3 + 10/3)e^{x+y}$

5.

$$f(x) = \begin{cases} xy \ln(x^2 + y^2), & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

6.  $x + y + 4 \cos x \cos y$

7.  $\sin x + \cos y + \cos(x - y)$  na intervalu  $(0, \frac{\pi}{2}) \times (0, \frac{\pi}{2})$

8.  $x - 2y + \ln(\sqrt{x^2 + y^2}) + 3 \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ ,  $x \neq 0$

9.  $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z$

10.  $(ax + by + cz)e^{-x^2-y^2-z^2}$ .

### Implicitní funkce

11. Dokažte, že existuje okolí  $V$  bodu  $(1, 1)$  takové, že množina

$$\{(x, y); x^3 + y^3 - 2xy = 0\} \cap V$$

je grafem nějaké funkce, která je třídy  $C^2$  na nějakém okolí bodu 1. Spočtěte  $f'(1)$  a  $f''(1)$ .

12. Dokažte, že existuje okolí  $V$  bodu  $(3, -2, 2)$  takové, že množina

$$\{(x, y, z); z^3 - xz + y = 0\} \cap V$$

je grafem nějaké funkce, která je třídy  $C^2$  na nějakém okolí bodu  $(3, -2)$ . Spočtěte  $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(3, -2)$ .

13. Spočtěte parciální derivace 2. řádu funkce implicitně zadané vztahem  $x + y + z = e^{-(x+y+z)}$ .
14. Nalezněte první a druhý diferenciál funkce dané vztahem  $z = x + \arctg \frac{y}{z-x}$ .
15. Jsou-li  $x = f(y, z)$ ,  $y = g(x, z)$ ,  $z = h(x, y)$  implicitně zadány vztahem  $F(x, y, z) = 0$ , ukažte, že  $f_y g_z h_x = -1$ .
16. Napište  $du$  a  $dv$ , je-li  $u + v = x + y$ ,  $\frac{\sin u}{\sin v} = \frac{x}{y}$ .
17. Hledejte lokální extrémů funkce  $z = z(x, y)$ , dané implicitně vztahem

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 + y^2 - z^2).$$