Navier–Stokesovy rovnice

Doc. Mgr. Milan Pokorný Ph.D.

6. března 2022

. . . v budoucnosti se bude umění s technikou tak nějak harmonicky doplňovat – lyrickoepické verše pomohou při chemizaci likvidační praxe – periodická soustava pomůže rozvoji impresionismu – na každém technickém výrobku bude zvláštní ploška, vyhrazená pro účinný estetický vjem – komíny atomových elektráren budou pomalovány našimi nejlepšími krajináři – dvacet tisíc mil pod mořem budou čítárny přístupné všem – diferenciální rovnice se budou psát ve verších – na střechách cyklotronů budou divadla malých forem – a v nich se budou recitovat diferenciální rovnice – tak nějak lidsky . . .

Václav Havel, Zahradní slavnost

Obsah

Kapitola 1

Pánové Navier, Stokes, jeden systém PDR, několik dalších pánů, jedna dáma a milion dolarů

S tekutinami se setkáváme stále. Země je obklopena atmosférou, voda tvoří 80% lidského těla, přenáší základní živiny. Každé pondělí si dáváme „matematický čaj“ a bez vína či piva bychom byli o něco ochuzeni.

Je tedy zřejmé, že lidstvo se snažilo studovat tekutiny od samého prvopočátku, kdy si začalo uvědomovat svou existenci. Staří Řekové pokládali vodu za jeden ze čtyř živlů. Ale až poměrně pozdě se přistoupilo k matematickému chápání popisu tekutin. V roce 1822 navrhl francouzský inženýr C.M.L.H. Navier jistou soustavu parciálních diferenciálních rovnic jako model popisující viskózní nestlačitelné tekutiny. Když se na jeho odvození rovnic podívali fyzikové, okamžitě jej smetli ze stolu – fyzikální předpoklady byly naprosto nerealistické. Později ale ke stejnému systému rovnic nezávisle dospěli S.D. Poisson (1829) a A.J.C.B. de Saint-Venant (1843), jejich jména ale s tímto systémem rovnic bohužel spojena nejsou.

V roce 1845 G.H. Stokes odvodil mnohem rigoróznějším způsobem, takovým, jaký znáte z přednášky z mechaniky kontinua, model lineárně viskózní tekutiny. A dostal tytéž rovnice co o 23 let dříve Navier. Tedy co vlastně zkoumáme. Hledáme

$$\mathbf{u}\colon [0,T) \times \overline{\Omega} \to \mathbf{R}^N,$$

$$p\colon [0,T) \times \overline{\Omega} \to \mathbf{R},$$

tak, že

$$\left.\begin{array}{rl} \dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u} - \nu\Delta\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} & \text{v } (0,T)\times\Omega \\ \operatorname{div}\mathbf{u} = 0 & \text{v } (0,T)\times\Omega \end{array}\right\} \equiv Q_T,\ \Omega\subset\mathbf{R}^N,\ N\geq 2. \tag{1.1}$$

Je třeba dodat počáteční podmínku pro rychlost $\mathbf{u}(0,x) = \mathbf{u}_0(x)$ a okrajové podmínky. My budeme uvažovat pouze $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ na $(0,T)\times\partial\Omega$, ale nesnažíme se vůbec tvrdit, že je to ten jediný správný model. Koneckonců, mohli bychom klidně uvažovat řešení Cauchyovy úlohy a potíží bude stále dost a dost.

Na první pohled je to docela kultivovaný systém PDR. Jediná nelinearita je kvadratická a má navíc ještě pěknou vlastnost, což uvidíme později. Umožňuje odvodit základní apriorní odhady. Ale přesto, je to nelinearita záludná. Z hlediska charakterizace nelinearit je to pro $N = 2$ případ kritický, totiž s jistou námahou zvládnutelný, zatímco pro $N = 3$ (a ten bychom asi vyřešili nejraději) problém superkritický. Tedy bez dodatečných triků nezvládnutelný.

Prvním, kdo se pokusil tento systém seriózně matematicky studovat, byl C.W. Oseen [27]. Na jeho práce pak navázal J. Leray v sérii článků z let 1933–34 ([19], [20]), které obsahovaly výsledky jeho doktorské práce. Zatímco pro případ $\Omega = \mathbf{R}^2$ dokázal existenci a jednoznačnost klasického řešení, pro $\Omega = \mathbf{R}^3$ neuspěl. Dokázal pouze existenci tzv. „turbulentního řešení“ (věřil, že právě turbulence je zodpovědná za případné singularity), což je v moderním jazyce de facto slabé řešení splňující silnou energetickou nerovnost.

Navrhl též jistou možnost kterak ukázat, že klasické řešení nemusí obecně existovat. To, že tato metoda nefunguje, bylo ukázáno až relativně nedávno v článcích J. Nečas, M. Růžička, V. Šverák [25]; J. Málek, J. Nečas, M. Pokorný, M. Schonbek [23] a T. Tsai [33].

Pak přišla druhá světová válka. Po ní německý matematik E. Hopf [14] rozšířil výsledky J. Leraye i do omezených oblastí. Zhruba o desetiletí později se objevuje O.A. Ladyženská [18], která se až do své smrti intenzívně Navier–Stokesovým rovnicím věnovala. Po ní potom celá řada vynikajících matematiků: J.-L. Lions [21], L. Cafferelli, R. Kohn, L. Nirenberg [5], P.-L. Lions [22], ...

V posledních letech se objevily zajímavé nové výsledky. Pro tzv. velmi slabé řešení (tedy řešení, pro které ani nemusí existovat první prostorové derivace) T. Buckmaster a V. Vicol v práci [3] ukázali, že tento pojem je až příliš slabý a takových řešení může existovat hodně, dokonce až nespočetně mnoho. Tento výsledek je spojen s analogickými výsledky pro Eulerovy rovnice C. De Lellise a L. Székelyhidiho (původní práce je [7]).

Navíc, V. Šverák a H. Jia naznačili [15], že pro ne příliš hladké počáteční podmínky by mohlo existovat více řešení Navier–Stokesových rovnic. Tento výsledek je založen na splnění jisté podmínky, jejíž „numerický“ důkaz pochází z práce [13]. Nejde ale prozatím o důkaz analytický, tedy jde jen o náznak, že by tomu mohlo tak být.

Fundamentální otázka, zda existuje ve třech prostorových dimenzích hladké (tj. klasické) řešení pro libovolně velká data úlohy a libovolně dlouhý časový interval, zůstává stále nezodpovězena. To, spolu se snahou napodobit D. Hilberta ve formulaci „otevřených problémů pro další století“, vedlo Clayův institut v Massachusetts k vyhlášení „sedmi otevřených problémů“ a odměny 1 000 000 dolarů za jejich vyřešení. A tak se Navier–Stokesovy rovnice objevily vedle takových problémů, jako je dnes již dokázaná Poincarého hypotéza, Riemannova hypotéza atd.

Co to je tedy slabé řešení? Vezměme $\boldsymbol{\varphi}$, hladkou funkci s kompaktním nosičem a nulovou divergencí, a přenásobme jí rovnici (1.1). Jelikož (připomeňme, že budeme používat sumační konvenci, tj. $u_i v_i := \sum_{i=1}^N u_i v_i$, $N = 2, 3$)

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u})_j = u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}(u_i u_j) - \underbrace{\frac{\partial u_i}{\partial x_i}}_{=0} u_j,$$

$$\int_\Omega \frac{\partial p}{\partial x_i} \varphi_i \,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} p \underbrace{\boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{n}}_{=0} \,\mathrm{d}S - \int_\Omega p \underbrace{\operatorname{div} \boldsymbol{\varphi}}_{=0} \,\mathrm{d}x,$$

dostáváme

$$\int_0^T \int_\Omega u_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t + \int_0^T \int_\Omega u_i u_j \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t + \nu \int_0^T \int_\Omega u_i \Delta \varphi_i \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t = -\int_0^T \int_\Omega f_i \varphi_i \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t.$$

(My si později ukážeme mírně analogickou formulaci, ale myšlenka je právě tato.) Stačí nám tedy předpokládat, že $\mathbf{u} \in (L^2_{loc}(Q_T))^N$ a $\mathbf{f} \in (L^1_{loc}(Q_T))^N$; pak mají všechny členy smysl.

Budou nás zajímat následující otázky:

1. Existence slabého řešení. ($N = 2, 3$)
2. Zda je slabé řešení jednoznačné v rozumné třídě řešení. ($N = 2$)
3. Pokud máme řešení hladší, zda už je to nutně jediné řešení („weak–strong uniqueness“ – je-li slabé řešení silné, potom je již jediné na třídě slabých řešení). ($N = 3$)
4. Zda je každé slabé řešení s hladkými daty nutně hladké. ($N = 2$ ano, $N = 3$ není známo).

   Právě tato otázka je oním problémem za 1 000 000 dolarů: (C. Fefferman):

   $\mathbf{f}$: hladká funkce s kompaktním nosičem

   $\mathbf{u}_0$: hladká funkce s kompaktním nosičem

   Existuje klasické řešení Navier–Stokesových rovnic na $\mathbf{R}^3$ pro libovolně dlouhý čas? (Buď dokázat, nebo najít protipříklad.)

Kapitola 2

Základní prostory funkcí

2.1 Sobolevovy a Lebesgueovy prostory

Používáme standardní značení pro
Sobolevův prostor: $W^{k,p}(\Omega)$, $k \in \mathbf{N}$, $1 \le p \le \infty$
Lebesgueův prostor: $L^q(\Omega)$, $1 \le q \le \infty$

S těmito prostory se lze podrobněji seznámit například ve skriptech z moderní teorie parciálních diferenciálních rovnic [4] či ve standardních monografiích věnovaných teorii funkcí [1] nebo [17].

Uveďme jen jednu poznámku o interpolacích:

a) Lebesgue:

Tvrzeníčko 2.1.1. *Nechť $f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$, $1 \le p < q \le \infty$, $\Omega \subset \mathbf{R}^N$. Potom $f \in L^r(\Omega)$, $p \le r \le q$ a*

$$\|f\|_r \le \|f\|_p^\alpha \, \|f\|_q^{1-\alpha}, \qquad \frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q}, \qquad \alpha \in [0,1]. \tag{2.1}$$

Důkaz. Je přenechán čtenáři jako elementární rozcvička na úvod. ■

b) Lebesgue, Sobolev:

Máme $f \in L^q(\Omega) \cap W^{1,s}(\Omega)$, $1 \le q < \infty$. Je možno odvodit nerovnost typu

$$\|f\|_r \le C \|f\|_q^{1-\alpha} \, \|f\|_{1,s}^\alpha$$

pro jisté hodnoty r, q a s? Odpověď je pozitivní.

Věta 2.1.1. *Nechť $\Omega \in C^{0,1}$ je omezená oblast v $\mathbf{R}^N$, $f \in W^{1,s}(\Omega) \cap L^q(\Omega)$, $1 \le q < \infty$.*

a) Je-li $s < N$, potom $f \in L^r(\Omega)$, $r \le \frac{Ns}{N-s}$ a pro $q \le r \le \frac{Ns}{N-s}$ existuje $C = C(\Omega, N, s, q, r)$:

$$\begin{aligned} &\|f\|_r \le C \, \|f\|_{1,s}^\alpha \|f\|_q^{1-\alpha}, \ \alpha \in [0,1], \\ &\frac{1}{r} = \alpha\Big(\frac{1}{s} - \frac{1}{N}\Big) + (1-\alpha)\,\frac{1}{q}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

b) Je-li $s = N$, potom lze brát v (2.2) $q \le r < \infty$ a pro $s > N$ lze brát $r \le \infty$.

Důkaz. Idea důkazu je založena na následujících dvou krocích:
a) ukážeme, že (2.2) platí pro $f \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$,
b) kombinací věty o prodloužení (proto $\Omega \in C^{0,1}$!) a hustoty hladkých funkcí (popř. regularizátor) se převede situace na omezenou oblast.

Poznámka: Je-li $\Omega = \mathbf{R}^N$ nebo $f \in W_0^{1,s}(\Omega)$, lze v (2.2) místo $\|f\|_{1,s}$ psát $\|\nabla f\|_s$.

Poznámka: Ukážeme si dvě speciální situace (2.2):

$N=2,\ r=4,\ s=q=2:$ $$\frac{1}{4} = \alpha\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right) + (1-\alpha)\frac{1}{2} \ \Rightarrow\ \alpha = \frac{1}{2},$$

$N=3,\ r=4,\ s=q=2:$ $$\frac{1}{4} = \alpha\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + (1-\alpha)\frac{1}{2} \ \Rightarrow \alpha = \frac{3}{4},$$

tj. $\exists C = C(N)\colon \forall u \in W^{1,2}(\Omega)\colon$ $$\|u\|_4 \le C\,\|u\|_{1,2}^{1/2}\,\|u\|_2^{1/2},\ \Omega \subset \mathbf{R}^2,$$ $$\|u\|_4 \le C\,\|u\|_{1,2}^{3/4}\,\|u\|_2^{1/4},\ \Omega \subset \mathbf{R}^3.$$

Proveďme důkaz:

a) $N=2$: Nechť $u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$. Potom $\|u\|_4 \le \sqrt{2}\|\nabla u\|_2^{1/2}\|u\|_2^{1/2}$.
Důkaz. Z Gagliardo–Nirenbergovy nerovnosti víme, že pro $v \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$

$$\|v\|_2 \le \|\nabla v\|_1.$$

Vezmeme $v = |u|^2$ a dostáváme

$$\|u\|_4^2 \le \int_{\mathbf{R}^2} |\nabla(u^2)|\,\mathrm{d}x \le 2\int_{\mathbf{R}^2} |u||\nabla u|\,\mathrm{d}x \le 2\|u\|_2\|\nabla u\|_2,$$

tj.

$$\|u\|_4 \le \sqrt{2}\|u\|_2^{\frac{1}{2}}\|\nabla u\|_2^{\frac{1}{2}}.$$

(Konstanta není optimální — viz R. Temam [31]: $C = 2^{\frac{1}{4}}$.)

b) $N=3$: Nechť $u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^3)$. Potom $\|u\|_4 \le (\frac{8}{3})^{\frac{3}{4}}\|\nabla u\|_2^{3/4}\|u\|_2^{1/4}$.
Důkaz. Analogicky jako výše máme

$$\|v\|_{\frac{3}{2}} \le \|\nabla v\|_1.$$

Zvolme $v = |u|^{\frac{8}{3}}$. Potom

$$\|u\|_4^{8/3} \le \int_{\mathbf{R}^3} |\nabla|u|^{\frac{8}{3}}|\,\mathrm{d}x \le \frac{8}{3}\int_{\mathbf{R}^3} |\nabla u||u|^{\frac{5}{3}}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{8}{3}\int_{\mathbf{R}^3} |\nabla u||u|^{\frac{5}{3}\alpha}|u|^{(1-\alpha)\frac{5}{3}}\,\mathrm{d}x \le \frac{8}{3}\|\nabla u\|_2\|u\|_4^{4/3}\|u\|_2^{1/3}.$$

(Neboť $\frac{1}{2} + \frac{5\alpha}{12} + \frac{5(1-\alpha)}{6} = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{4}{5}$.) Tedy celkem

$$\|u\|_4 \le \left(\frac{8}{3}\right)^{3/4} \|\nabla u\|_2^{3/4} \|u\|_2^{1/4}.$$

(Konstantu lze vylepšit na $C = \sqrt{2}$, viz [31].)

Speciálně, je-li $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$, pak platí nerovnosti výše se stejnou konstantou, stačí použít větu o hustotě hladkých funkcí. V obecném případě se použije věta o prodloužení a místo normy gradientu se objeví celá $W^{1,2}$-norma. ■

2.2 Bochnerovy prostory

Budou nás zajímat prostory funkcí $u\colon I \subset \mathbf{R} \to X$, kde X je Banachův prostor. Důkazy následujících tvrzení je možno nalézt např. v [17] či ve skriptech [4].

Definice 2.2.1. *a) $f\colon I \to X$ se nazývá jednoduchá funkce, jestliže existují $c_1 \dots, c_k \in X$ a $O_1, \dots, O_k \subset I$, $O_i \cap O_j = \emptyset$ $i \neq j$, O_i měřitelné tak, že $f(t) = \sum_{i=1}^{k} c_i \chi_{O_i}(t)$.*

b) $f\colon I \to X$ se nazývá silně měřitelná, existuje-li posloupnost jednoduchých funkcí f_n tak, že $\lim_{n\to\infty} \|f_n(t) - f(t)\|_X = 0$ pro s.v. $t \in I$.

Lemma 2.2.1. *Nechť f je silně měřitelná. Potom $\|f(\cdot)\|_X\colon I \to \mathbf{R}$ je měřitelná v Lebesgueově smyslu.*

Definice 2.2.2. *Funkce $f\colon I \to X$ je bochnerovsky integrovatelná, jestliže existuje posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ jednoduchých funkcí tak, že*

- $\lim_{n\to\infty} \|f_n(t) - f(t)\|_X = 0$ *pro s.v. $t \in I$ (tj. f je silně měřitelná),*
- $\lim_{n\to\infty} \int_I \|f_n(\cdot) - f(\cdot)\|_X \,\mathrm{d}t = 0.$

Je-li $J \subseteq I$ a f je bochnerovsky integrovatelná přes I, pak

$$\int_J f \,\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty} \int_I \chi_J(t) f_n(t) \,\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k_n} c_i^n |O_i^n \cap J|,$$

kde f_n splňuje předpoklady uvedené výše.

Věta 2.2.1 (Bochner)**.** *Silně měřitelná funkce $f\colon I \to X$ je bochnerovsky integrovatelná $\Longleftrightarrow$ $\|f(\cdot)\|_X$ má konečný Lebesgueův integrál přes I.*

Důsledek 2.2.1. *Nechť I je omezený otevřený interval v $\mathbf{R}$. Je-li $f \in C\left(\overline{I}; X\right)$, pak je bochnerovsky integrovatelná $\Longleftrightarrow$ $\|f(\cdot)\|_X$ má konečný Lebesgueův integrál přes I.*

Lemma 2.2.2. *Je-li f bochnerovsky integrovatelná přes I, pak*

a) $\| \int_I f \,\mathrm{d}t\|_X \le \int_I \|f\|_X \,\mathrm{d}t$,

b) $\lim_{|J|\to 0^+,\ J\subset I} \int_J f \,\mathrm{d}t = \mathbf{0} \in X$ (nulový prvek).

Poznámka. Z definice plyne, že pro $\eta \in X^*$ a φ bochnerovsky integrovatelná přes I platí

$$\left\langle \eta, \int_I \varphi(t) \,\mathrm{d}t \right\rangle_{X^*,X} = \int_I \langle \eta, \varphi(t) \rangle_{X^*,X} \,\mathrm{d}t.$$

2.2.1 Prostory $L^p(I;X)$

Definice 2.2.3. *Nechť X je Banachův prostor, $1 \le p \le \infty$, $I \subset \mathbf{R}$. Potom $L^p(I;X)$ je množina všech silně měřitelných $f\colon I \to X$ takových, že*

a) $1 \le p < \infty$
$\int_I \|f(t)\|_X^p \, \mathrm{d}t < \infty$,

b) $p = \infty$
$\operatorname*{ess\,sup}_I \|f(t)\|_X < \infty$.

$\square$

Věta 2.2.2. *Prostory $L^p(I;X)$ jsou lineární prostory. Pokud položíme $f_1 = f_2$ jestliže $f_1(t) = f_2(t)$ pro s.v. $t \in I$ (ve smyslu prostoru X), pak $L^p(I;X)$ jsou Banachovy prostory s normou*

$$\|f\|_{L^p(I;X)} = \Big(\int_I \|f(t)\|_X^p \, \mathrm{d}t \Big)^{1/p}, \qquad 1 \le p < \infty,$$
$$\|f\|_{L^\infty(I;X)} = \operatorname*{ess\,sup}_I \|f(\cdot)\|_X, \qquad p = \infty.$$

Poznamenejme, že je-li I omezený interval, pak

- $L^p(I;X) \hookrightarrow L^q(I;X)$, $1 \le q \le p$,
- $\| \int_I f(t) \, \mathrm{d}t \|_X \le \int_I \|f(t)\|_X \, \mathrm{d}t \le \|f\|_{L^p(I;X)} |I|^{1-\frac{1}{p}}$
  $\big(\|f(\cdot)\|_X \in L^1(I) \Rightarrow f$ je bochnerovsky integrovatelná.$\big)$

Věta 2.2.3. *Nechť X je reflexivní Banachův prostor, X^* jeho duál, $1 \le p < \infty$. Potom každý spojitý lineární funkcionál na $L^p(I;X)$ lze reprezentovat jako*

$$\langle \Phi, f \rangle_{(L^p(I;X))^*, L^p(I;X)} = \int_I \langle \varphi(t), f(t) \rangle_{X^*,X} \, \mathrm{d}t, \; f \in L^p(I;X), \; \varphi \in L^{p'}(I;X^*).$$

Je-li $1 < p < \infty$, X reflexivní Banachův prostor, potom $L^p(I;X)$ je reflexivní Banachův prostor.

Mějme $I = (0,T)$, $T < \infty$ a položme pro $f \in L^p(I;X)$, f prodloužené nulou vně I. Nechť ω je standardní regularizační jádro. Označme

$$f_h(t) = \frac{1}{h} \int_{\mathbf{R}} \omega \left(\frac{t-s}{h} \right) f(s) \, \mathrm{d}s.$$

Potom

$$f_h \in C^\infty \left([0,T] ; X \right).$$

Jestliže $f \in L^p(I;X)$ pro $1 \le p < \infty$, pak

$$f_h \longrightarrow f \text{ v } L^p(0,T;X)$$

a pro libovolné $1 \le p \le \infty$

$$\|f_h\|_{L^p(0,T;X)} \le \|f\|_{L^p(0,T;X)}.$$

Jako důsledek dostáváme

Věta 2.2.4. *Nechť $1 \le p < \infty$, X separabilní Banachův prostor. Potom též $L^p(I;X)$ je separabilní Banachův prostor.*

Důkaz. Je analogický situaci, kdy $X = \mathbf{R}$, a je ponechán na rozmyšlení čtenáři.

Speciálně, pro $1 \le p < \infty$ jsou v $L^p(0,T;X)$ husté funkce z $C_0^\infty \left((0,T) ; X \right)$.

2.2.2 Prostory s časovou derivací

Nyní se pokusme definovat časovou derivaci. Situace je analogická jako u slabé derivace funkcí z $L^p(\Omega)$.

Definice 2.2.4. *Nechť $u \in L^1_{loc}(0,T;X)$, $g \in L^1_{loc}(0,T;X)$. Potom $g = u'$ ($= \frac{\partial u}{\partial t}$), jestliže*

$$\int_0^T u(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^T g(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(0,T).$$

□

Lemma 2.2.3. *Nechť X je Banachův prostor, X^* jeho duál. Nechť $u, g \in L^1(0,T;X)$. Potom následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

$$u(t) = \xi + \int_0^t g(s)\,\mathrm{d}s, \qquad \text{pro s.v. } t \in [0,T]\,,\ \xi \in X, \tag{2.3}$$

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(0,T)\colon \int_0^T u(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^T g(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t, \tag{2.4}$$

$$\forall \eta \in X^*\colon \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle \eta, u\rangle_{X^*,X} = \langle \eta, g\rangle_{X^*,X} \ \text{ v } \mathcal{D}'(0,T). \tag{2.5}$$

Je-li (2.3)–(2.5) splněno, pak $u = \widetilde{u}$ s.v. na $[0,T]$, přičemž $\widetilde{u} \in C([0,T];X)$.

Důkaz.
Nejprve poznamenejme, že zobrazení $t \mapsto \int_0^t g(s)\,\mathrm{d}s$ je absolutně spojité na $[0,T]$ s hodnotami v X. Proto:
(2.3) $\Rightarrow$ (2.4): násobme (2.3) $\varphi'(t) \in \mathcal{D}(0,T)$ a výsledek plyne integrací per partes.
(2.3) $\Rightarrow$ (2.5): nejprve aplikujme na (2.3) $\eta \in X^*$ a pak stejně jako výše.
(2.5) $\Rightarrow$ (2.4): víme, že $\forall \varphi \in \mathcal{D}(0,T)$

$$\int_0^T \langle \eta, u\rangle_{X^*,X}\,\varphi'\,\mathrm{d}t = -\int_0^T \langle \eta, g\rangle_{X^*,X}\,\varphi\,\mathrm{d}t,$$

$\eta \in X^*$. Protože η nezávisí na t, díky linearitě integrálu

$$\left\langle \eta, \int_0^T u\varphi'\,\mathrm{d}t + \int_0^T g\varphi\,\mathrm{d}t \right\rangle_{X^*,X} = 0 \quad \forall \eta \in X^*,$$

což je (2.4).
(2.4) $\Rightarrow$ (2.3): můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že $g = 0$. Položme totiž $u_0(t) = \int_0^t g(s)\,\mathrm{d}s$ a $v = u(t) - u_0(t)$. Zřejmě $u_0 \in AC([0,T];X)$, ${u_0}' = g$ s.v. na I. Tedy nechť

$$\int_0^T v\varphi'\,\mathrm{d}t = 0 \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(0,T).$$

Dokažme, že potom $v = const \in X$. Každou funkci $\varphi \in \mathcal{D}(0,T)$ lze psát jako

$$\varphi = \lambda\varphi_0 + \psi'\,, \qquad \lambda = \int_0^T \varphi(s)\,\mathrm{d}s,$$

kde $\varphi_0 \in \mathcal{D}(0,T)$ je pevná funkce, pro níž

$$\int_0^T \varphi_0 \, \mathrm{d}s = 1,$$

a $\psi \in \mathcal{D}(0,T)$ je primitivní funkce k $\varphi - \lambda\varphi_0$ taková, že $\psi(0) = 0$. Máme tedy

$$\int_0^T (v(t) - \xi)\, \varphi(t) \, \mathrm{d}t = 0 \ \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(0,T), \ \xi = \int_0^T v(s)\varphi_0(s) \, \mathrm{d}s.$$

Nyní standardní regularizací v čase plyne, že $v(t) - \xi = 0$ s.v. na $(0,T)$. ■

Uvažujme dva separabilní Hilbertovy prostory, V (např. $W_0^{1,2}(\Omega)$) a H (např. $L^2(\Omega)$). Pomocí Rieszovy věty proveďme ztotožnění $H = H^*$. Vezměme Gelfandovu trojici

$$V \underset{\text{hustě}}{\hookrightarrow} H = H^* \underset{\text{hustě}}{\hookrightarrow} V^* \tag{2.6}$$

(husté vnoření duálů dokážeme později, viz Tvrzeníčko 2.2.1). Uvažujme naše prostory $V = W_0^{1,2}(\Omega)$ a $H = L^2(\Omega)$. Vnoření prostoru V do H reprezentuje operátor identity $I\colon W_0^{1,2}(\Omega) \to L^2(\Omega)$. Nyní se podívejme na ztotožnění H a H^*. K libovolnému $\Phi \in \big(L^2(\Omega)\big)^*$ $\exists! g \in L^2(\Omega)$: $\langle \Phi_g, \varphi \rangle_{H^*,H} = \int_\Omega g\varphi \, \mathrm{d}x$, $\|\Phi\|_{(L^2(\Omega))^*} = \|g\|_{L^2(\Omega)}$. Tento funkcionál patří do $(W_0^{1,2}(\Omega))^*$ ve smyslu

$$\langle \Phi_g, \psi \rangle_{(W_0^{1,2}(\Omega))^*, W_0^{1,2}(\Omega)} = \int_\Omega g\psi \, \mathrm{d}x \ \ \forall \psi \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

Proto pro $g \in W_0^{1,2}(\Omega)$

$$\langle g, \psi \rangle_{(W_0^{1,2}(\Omega))^*, W_0^{1,2}(\Omega)} = \langle \Phi_g, \psi \rangle_{(W_0^{1,2}(\Omega))^*, W_0^{1,2}(\Omega)} = \int_\Omega g\psi \, \mathrm{d}x \ \ \forall \psi \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

V obecném případě máme pro $u, v \in V \hookrightarrow H$

$$(Iu, Iv)_H = \langle \Phi_{Iu}, Iv \rangle_{H^*,H},$$

kde $I\colon V \to H$ je operátor identity reprezentující vnoření a $\Phi_{(\cdot)}$ hraje jako výše roli zobrazení z Rieszovy věty o reprezentaci. Potom

$$\langle u, v \rangle_{V^*,V} \stackrel{\text{def}}{=} \langle \Phi_{Iu}, Iv \rangle_{H^*,H} = (Iu, Iv)_H, \ \forall v \in V.$$

V tomto smyslu chápeme, že $V \hookrightarrow V^*$. Vše projde analogicky i pro případ, kdy V je pouze reflexivní Banachův prostor.

Poznámka. V terminologii prostorů V a H lze definovat časovou derivaci funkce $u \in L^p(0,T;V)$ ležící v prostoru $L^q(0,T;V^*)$ tak, že platí

$$\int_0^T \langle u', v \rangle_{V^*,V} \psi \, \mathrm{d}t = -\int_0^T (Iu, Iv)_H \psi' \, \mathrm{d}t \qquad \forall v \in V, \forall \psi \in C_0^\infty(0,T).$$

Navíc, jsou-li $u, v \in L^p(0,T;V)$, $u', v' \in L^{p'}(0,T;V^*)$ a $\psi \in C_0^\infty(0,T)$, $2 \le p < \infty$, pak

$$\int_0^T \Big(\langle u', v \rangle_{V^*,V} + \langle v', u \rangle_{V^*,V} \Big) \psi \, \mathrm{d}t = -\int_0^T (Iu, Iv)_H \psi' \, \mathrm{d}t.$$

Důkaz je analogický lemmatu níže.

V dalším budeme, pokud nebude hrozit nedorozumění, značení I pro identitu vynechávat.

Lemma 2.2.4. *Nechť V je reflexivní Banachův prostor, H je Hilbertův prostor, V^* a H^* jsou příslušné duální prostory. Nechť $V \underset{hustě}{\hookrightarrow} H = H^* \underset{hustě}{\hookrightarrow} V^*$. Nechť $u \in L^p(0,T;V)$, $u' \in L^{p'}(0,T;V^*)$, $1 < p < \infty$. Potom je u rovno s.v. na $(0,T)$ spojité funkci z $[0,T]$ do H. Navíc*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \|u\|_H^2 = 2 \langle u', u \rangle_{V^*,V} \ \text{ v } \mathcal{D}'(0,T). \tag{2.7}$$

Důkaz. Důkaz provedeme ve třech krocích.

Krok 1. Dokažme platnost rovnosti (2.7). Z Lemmatu 2.2.3 víme, že $u \in C([0,T];V^*)$, neboť $V \hookrightarrow V^*$, tj. $u, u' \in L^1(0,T;V^*)$. Dále

$$\|u\|_H^2 = (u,u)_H = \langle u,u \rangle_{H^*,H} = \langle \underbrace{u}_{\in L^\infty(0,T;V^*)}, \underbrace{u}_{\in L^p(0,T;V)} \rangle_{V^*,V} \in L^1(0,T),$$

tj. $u \in L^2(0,T;H)$. Nyní nechť u_m je regularizace $\tilde{u}$ ($\tilde{u} = u$ na $[0,T]$, jinak $\tilde{u} = \mathbf{0} \in V$), $u_m \in C^\infty([0,T];V)$,

$$\begin{aligned} u_m &\longrightarrow u \text{ v } L^p(0,T;V), \\ u_m' &\longrightarrow u \text{ v } L^{p'}(0,T;V^*), \\ u_m &\longrightarrow u \text{ v } L^2(0,T;H). \end{aligned}$$

Tedy

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \|u_m\|_H^2 = 2 (u_m', u_m)_H = 2 \langle u_m', u_m \rangle_{V^*,V} \qquad \forall m \in \mathbf{N},$$

proto

$$-\int_0^T \|u_m\|_H^2 \varphi' \,\mathrm{d}t = 2 \int_0^T \underbrace{\langle u_m', u_m \rangle_{V^*,V}}_{\in L^1(0,T)} \varphi \,\mathrm{d}t \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(0,T)$$

a limitním přechodem $m \to \infty$

$$-\int_0^T \|u\|_H^2 \varphi' \,\mathrm{d}t = 2 \int_0^T \langle u', u \rangle_{V^*,V} \varphi \,\mathrm{d}t \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(0,T),$$

což je rovnost (2.7), kde jsme použili, že funkce: $t \mapsto \langle u', u \rangle_{V^*,V}(t) \in L^1(0,T)$, neboť díky tomu, že $u' \in L^{p'}(0,T;V^*)$ a $u \in L^p(0,T;V)$,

$$\int_0^T \langle u', u \rangle_{V^*,V} \,\mathrm{d}t \le \int_0^T \|u'\|_{V^*} \|u\|_V \,\mathrm{d}t < +\infty;$$

tedy $u \in L^\infty(0,T;H)$. Navíc $u \in C([0,T];V^*)$ a $\|u\|_H^2 \in C([0,T])$.

Krok 2. Platí:

Lemma 2.2.5. *Nechť X, Y jsou Banachovy prostory, X je reflexivní a platí $X \underset{hustě}{\hookrightarrow} Y$. Nechť $\varphi \in L^\infty(0,T;X)$ a současně $\varphi \in C([0,T];Y_w)$. Potom $\varphi \in C([0,T];X_w)$.*

Důkaz Lemmatu 2.2.5 uvedeme níže. Jen připomenutí (pro krajní body uvažujeme příslušné jednostranné limity):

$$\begin{aligned}\varphi &\in C([0,T];Y) \iff \lim_{t\to t_0} \|\varphi(t)-\varphi(t_0)\|_Y = 0 \quad \forall t_0 \in [0,T],\\ \varphi &\in C([0,T];Y_w) \iff \lim_{t\to t_0} \langle \eta, \varphi(t)\rangle - \langle \eta, \varphi(t_0)\rangle \\ &= \lim_{t\to t_0} \langle \eta, \varphi(t)-\varphi(t_0)\rangle = 0 \quad \forall \eta \in Y^*, \forall t_0 \in [0,T].\end{aligned}$$

Zřejmě $\varphi \in C([0,T];Y) \Rightarrow \varphi \in C([0,T];Y_w)$, obrácená implikace platí jen pro Y konečně dimenzionální. Proto máme, že $u \in C([0,T];V^*)$, což implikuje $u \in C([0,T];V_w^*)$, a proto díky Lemmatu 2.2.5 a ztotožnění $H = H^*$ víme, že $u \in C([0,T];H_w)$.

Krok 3. Dokažme nyní, že $u \in C([0,T];H)$. Nechť $t_0 \in I$. Počítejme

$$\|u(t)-u(t_0)\|_H^2 = \|u(t)\|_H^2 - 2(u(t),u(t_0))_H + \|u(t_0)\|_H^2 \ .$$

Tedy, díky tomu, že $\|u(\cdot)\|_H^2 \in C([0,T])$ a $u(t) \rightharpoonup u(t_0)$ pro $t \to t_0$ (v krajních bodech opět příslušné jednostranné limity),

$$\begin{aligned}&\lim_{t\to t_0} \|u(t)-u(t_0)\|_H^2\\ = \lim_{t\to t_0} &\underbrace{\|u(t)\|_H^2}_{\to\|u(t_0)\|_H^2} - \lim\nolimits_{t\to t_0} \underbrace{2(u(t),u(t_0))_H}_{\to 2(u(t_0),u(t_0))_H \text{ díky kroku 2}} + \|u(t_0)\|_H^2\\ &= \|u(t_0)\|_H^2 - 2\|u(t_0)\|_H^2 + \|u(t_0)\|_H^2 = 0.\end{aligned}$$

■

Zbývá dokázat Lemma 2.2.5. Uvědomme si nejprve, že

Tvrzeníčko 2.2.1. *Nechť X je reflexivní Banachův prostor. Nechť $X \underset{hustě}{\hookrightarrow} Y$. Potom $Y^* \underset{hustě}{\hookrightarrow} X^*$.*

Důkaz. Označme

$$i\colon X \longrightarrow Y$$

zobrazení realizující vnoření $X \hookrightarrow Y$, tj. spojité prosté zobrazení z X do Y, definované na celém X. Dle předpokladu dále víme, že $i(X)$ je husté v Y. Definujme

$$i^*\colon Y^* \longrightarrow X^*$$

tak, že

$$\langle i^*(y^*), x\rangle_{X^*,X} := \langle y^*, i(x)\rangle_{Y^*,Y}.$$

Ukažme, že i^* realizuje vnoření Y^* do X^*, tj. je prosté spojité zobrazení definované na celém Y^*, takové, že $i^*(Y^*)$ je husté v X^*.

Nechť $i^*(y^*) = 0$, tj. $\langle y^*, i(x)\rangle_{Y^*,Y} = 0$ pro všechna $x \in X$. Protože $i(X)$ je husté v Y, je nutně $y^* = 0$. Nechť X je reflexivní Banachův prostor. Předpokládejme, že $\overline{Y^*} \neq X^*$. Potom $\exists\, x^{**} \in X^{**}\colon \forall\, y^* \in Y^*$ je $\langle x^{**}, i^*(y^*)\rangle_{X^{**},X^*} = 0$, ale $x^{**} \neq 0$. Díky reflexivitě existuje $x \in X$: $x^{**} = \mathcal{J}(x)$ ($\mathcal{J}(x)$ je kanonické zobrazení) tak, že

$$\begin{aligned}\langle i^*(y^*), x\rangle_{X^*,X} = 0 \ \ \forall y^* \in Y^* \quad &\Longrightarrow\\ \langle y^*, i(x)\rangle_{Y^*,Y} = 0 \ \ \forall y^* \in Y^* \quad &\Longrightarrow \quad i(x) = 0,\end{aligned}$$

tedy díky prostotě zobrazení i je $x = 0$, což je spor s tím, že $\overline{Y^*} \neq X^*$. ■

Nyní můžeme přistoupit k důkazu Lemmatu 2.2.5, které má samostatný význam.

Důkaz (Lemmatu 2.2.5)**.** Protože $X \underset{\text{hustě}}{\hookrightarrow} Y$, je $Y^* \underset{\text{hustě}}{\hookrightarrow} X^*$. Dle předpokladu víme, že

$$\langle \eta, \varphi(t) \rangle_{Y^*,Y} \underset{t \to t_0}{\longrightarrow} \langle \eta, \varphi(t_0) \rangle_{Y^*,Y} \quad \forall \eta \in Y^*.$$

Cílem je ukázat, že

$$\langle \mu, \varphi(t) \rangle_{X^*,X} \underset{t \to t_0}{\longrightarrow} \langle \mu, \varphi(t_0) \rangle_{X^*,X} \quad \forall \mu \in X^*.$$

Definujme $\widetilde{\varphi}(t) \in X$ tak, že

$$\langle \mathcal{J}(\widetilde{\varphi}(t)), \mu \rangle_{X^{**},X^*} = \liminf_{\substack{h \to 0 \\ t+h \in I}} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \langle \mu, \varphi(s) \rangle_{X^*,X} \, \mathrm{d}s.$$

Zřejmě pravá stana je omezena $\|\varphi\|_{L^\infty(0,T;X)} \|\mu\|_{X^*}$, a tudíž $\mathcal{J}(\widetilde{\varphi}(t)) \in X^{**}$. Protože X je reflexivní, je $\widetilde{\varphi}(t) \in X$ jednoznačně definovaný. Navíc

$$\|\widetilde{\varphi}(t)\|_X = \sup_{\|\mu\|_{X^*} \le 1} \langle \mu, \tilde{\varphi}(t) \rangle \le \sup_{\|\mu\|_{X^*} \le 1} \|\varphi\|_{L^\infty(0,T;X)} \|\mu\|_{X^*} \le \|\varphi\|_{L^\infty(0,T;X)} .$$

Speciálně pro $\mu \in Y^*(\underset{\text{hustě}}{\hookrightarrow} X^*)$ vidíme, že $\widetilde{\varphi}(t) = \varphi(t)$ na $[0,T]$. Platí tedy $\|\varphi(t)\|_X \le \|\varphi\|_{L^\infty(0,T;X)} \;\; \forall t \in [0,T]$. Nyní, protože Y^* je husté v X^*, $\forall \mu \in X^*$ a $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \mu_\varepsilon \in Y^* : \|\mu_\varepsilon - \mu\|_{X^*} < \varepsilon$. Zvolme pevně $\varepsilon > 0$. Tedy

$$\langle \mu, \varphi(t) - \varphi(t_0) \rangle_{X^*,X} = \langle \mu - \mu_{\tilde{\varepsilon}}, \varphi(t) - \varphi(t_0) \rangle_{X^*,X} + \langle \mu_{\tilde{\varepsilon}}, \varphi(t) - \varphi(t_0) \rangle_{X^*,X} .$$

Nyní, pro $\tilde{\varepsilon}$ vhodně zvolené, je první člen

$$\begin{aligned} &| \langle \mu - \mu_{\tilde{\varepsilon}}, \varphi(t) - \varphi(t_0) \rangle_{X^*,X} | \\ &\le \|\mu - \mu_{\tilde{\varepsilon}}\|_{X^*} \|\varphi(t) - \varphi(t_0)\|_X \le 2 \|\varphi\|_{L^\infty(0,T;X)} \tilde{\varepsilon} < \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Druhý člen je malý pro t dosti blízko t_0, neboť $\mu_{\tilde{\varepsilon}} \in Y^*$ a

$$| \langle \mu_{\tilde{\varepsilon}}, \varphi(t) - \varphi(t_0) \rangle_{X^*,X} | = | \langle \mu_{\tilde{\varepsilon}}, \varphi(t) - \varphi(t_0) \rangle_{Y^*,Y} | < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tedy k libovolnému $\varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall t \in U_\delta(t_0)$: $| \langle \mu, \varphi(t) - \varphi(t_0) \rangle_{X^*,X} | < \varepsilon$. ■

Důležité bude pro nás kompaktní vnoření z prostoru

$$W = W^{\alpha_0,\alpha_1}_{X_0,X_1} = \{ v \in L^{\alpha_0}(0,T;X_0); v' \in L^{\alpha_1}(0,T;X_1) \}$$

do vhodného prostoru $L^\alpha(0,T;X)$. Položme

$$\|v\|_W = \|v\|_{L^{\alpha_0}(0,T;X_0)} + \|v'\|_{L^{\alpha_1}(0,T;X_1)} .$$

Platí

Věta 2.2.5 (Aubin–Lions)**.** *Nechť X_0, X_1, X jsou tři Banachovy prostory splňující $X_0 \hookrightarrow\hookrightarrow X \hookrightarrow X_1$. Nechť X_0, X_1 jsou navíc prostory reflexivní. Dále nechť $1 < \alpha_i < \infty$, $i = 0, 1$.*

Potom pro $0 < T < \infty$ je $W \hookrightarrow\hookrightarrow L^{\alpha_0}(0,T;X)$.

Poznámka. Je možno brát $\alpha_1 = 1$, pak je ovšem důkaz komplikovanější a my nepotřebujeme ani komplikace, ani sílu tohoto tvrzení.

Nejprve dokažme:

Lemma 2.2.6. *Nechť X_0, X_1, X jsou Banachovy prostory splňující: $X_0 \hookrightarrow\hookrightarrow X \hookrightarrow X_1$.*
Potom $\forall \eta > 0 \;\; \exists c_\eta$ tak, že $\forall v \in X_0$

$$\|v\|_X \leq \eta \|v\|_{X_0} + c_\eta \|v\|_{X_1} . \tag{2.8}$$

Důkaz. Lemma budeme dokazovat sporem. Nechť (2.8) neplatí, tj. $\exists \eta > 0$: $\forall m \in \mathbf{N} \; \exists w_m \in X_0$, že

$$\|w_m\|_X > \eta \|w_m\|_{X_0} + m \|w_m\|_{X_1} .$$

Položme

$$v_m = \frac{w_m}{\|w_m\|_{X_0}},$$

tedy

$$\|v_m\|_X > \eta + m \|v_m\|_{X_1} .$$

Protože $\|v_m\|_{X_0} = 1$, v_m je omezená v X (díky vnoření) a tedy

$$\|v_m\|_{X_1} \longrightarrow 0 \text{ pro } m \longrightarrow \infty.$$

Dále existuje podposloupnost v_{m_k} silně konvergentní v X ($X_0 \hookrightarrow\hookrightarrow X$) a tedy $v_{m_k} \to 0$ v X. Ale $\|v_{m_k}\|_X > \eta > 0$, což dává spor. ■

Důkaz (Aubin–Lions)**.** Důkaz provedeme ve čtyřech krocích.
Krok 1. Nechť u_m je omezená posloupnost prvků z W. Chceme dokázat, že existuje u_{m_k}, silně konvergentní podposloupnost v $L^{\alpha_0}(0, T; X)$. Protože X_0, X_1 jsou reflexivní, $1 < \alpha_i < \infty$, je i W reflexivní, a tudíž existuje $u \in W$ tak, že

$$u_{m_k} \rightharpoonup u \text{ ve } W,$$

tedy

$$\begin{aligned} u_{m_k} &\rightharpoonup u \text{ v } L^{\alpha_0}(0, T; X_0), \\ u'_{m_k} &\rightharpoonup u' \text{ v } L^{\alpha_1}(0, T; X_1). \end{aligned}$$

Je třeba dokázat, že $v_{m_k} = u_{m_k} - u \to 0$ v $L^{\alpha_0}(0, T; X)$.
Krok 2. Stačí dokázat, že $v_{m_k} \to 0$ v $L^{\alpha_0}(0, T; X_1)$. Pak totiž

$$\|v_{m_k}\|_{L^{\alpha_0}(0,T;X)} \leq \eta \|v_{m_k}\|_{L^{\alpha_0}(0,T;X_0)} + c_\eta \|v_{m_k}\|_{L^{\alpha_0}(0,T;X_1)} ,$$

a díky omezenosti v^{m_k} ve W máme

$$\|v_{m_k}\|_{L^{\alpha_0}(0,T;X)} \leq C\eta + c_\eta \|v_{m_k}\|_{L^{\alpha_0}(0,T;X_1)} .$$

K libovolnému $\varepsilon > 0$ existuje $\eta > 0$: $C\eta < \frac{\varepsilon}{2}$ a existuje n_0: $\forall m_k > n_0$ je $c_\eta \|v^{m_k}\|_{L^{\alpha_0}(0,T;X_1)} < \frac{\varepsilon}{2}$. Proto

$$\|v_{m_k}\|_{L^{\alpha_0}(0,T;X)} < \varepsilon$$

a $\varepsilon > 0$ bylo libovolné, tvrzení je proto dokázáno.

Krok 3. Ukažme, že $W \hookrightarrow C([0,T];X_1)$. Víme, že (po případné změně na podmnožině $[0,T]$ míry nula) každý prvek z W patří do $C([0,T];X_1)$ díky Lemmatu 2.2.3. Spojitost vnoření je zřejmá, neboť díky Lemmatu 2.2.3 víme, že

$$u(t) = u(0) + \int_0^t u'(s)\,\mathrm{d}s,$$

a tedy

$$\|u(t)\|_{X_1} \le \|u(0)\|_{X_1} + \|u'\|_{L^1(0,T;X_1)}\,.$$

Dále, integrováním rovnosti výše přes $(0,T)$

$$\begin{aligned}
&T\,\|u(0)\|_{X_1} \le \|u\|_{L^1(0,T;X_1)} + T\,\|u'\|_{L^1(0,T;X_1)} \\
&\le C\,\|u\|_{L^1(0,T;X_0)} + T\,\|u'\|_{L^1(0,T;X_1)} \\
&\Longrightarrow \max_{t\in[0,T]} \|u(t)\|_{X_1} \le C\,\|u\|_W\,.
\end{aligned}$$

Krok 4. Víme, že $\|v_{m_k}(t)\|_{X_1} \le C \;\; \forall t \in [0,T]$; tedy díky Lebesgueově větě o majorizované konvergenci nám stačí dokázat, že

$$v_{m_k}(t) \longrightarrow 0 \;\text{ silně v } X_1.$$

Zvolme např. $t = 0$. Potom

$$v_{m_k}(0) = v_{m_k}(t) - \int_0^t v'_{m_k}(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

Integrujme tuto rovnost od nuly do s:

$$\begin{aligned}
v_{m_k}(0) &= \frac{1}{s}\Big\{\int_0^s v_{m_k}(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^s \Big(\int_0^t v'_{m_k}(\tau)\,\mathrm{d}\tau\Big)\,\mathrm{d}t\Big\} \\
&= \frac{1}{s}\int_0^s v_{m_k}(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{s}\int_0^s (s-\tau)v'_{m_k}(\tau)\,\mathrm{d}\tau := a_{m_k} + b_{m_k}.
\end{aligned}$$

Zvolme $\varepsilon > 0$. Zjevně $\|b_{m_k}\|_{X_1} \le \int_0^s \left\|v'_{m_k}(\tau)\right\|_{X_1}\mathrm{d}\tau < \frac{\varepsilon}{2}$ pro s vhodně malé ($\alpha_1 > 1$!). Víme, že $v_{m_k} \rightharpoonup 0$ v $L^{\alpha_0}(0,T;X_0)$ a tedy $a_{m_k} = \frac{1}{s}\int_0^s v_{m_k}(t)\,\mathrm{d}t \rightharpoonup 0$ v X_0, a proto $a_{m_k} \to 0$ v X_1. Protože s je pevné, je pro n_0 dosti velké $\|a_{m_k}\|_{X_1} < \frac{\varepsilon}{2} \;\; \forall m_k > n_0$. ∎

2.3 Prostory s nulovou divergencí

2.3.1 Temamovy prostory

Definujme

Definice 2.3.1. *Nechť $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ je omezená oblast. Položme pro $1 \le p < \infty$*

$$\begin{aligned}
&E^p(\Omega) = \{\boldsymbol{g} \in (L^p(\Omega))^N; \operatorname{div}\boldsymbol{g} \in L^p(\Omega)\}, \\
&\|\boldsymbol{g}\|_{E^p(\Omega)} = \|\boldsymbol{g}\|_p + \|\operatorname{div}\boldsymbol{g}\|_p, \\
&E_0^p(\Omega) = \overline{(C_0^\infty(\Omega))^N}^{\|\cdot\|_{E^p(\Omega)}}.
\end{aligned}$$

Zřejmě jsou oba prostory Banachovými prostory, které jsou pro $p > 1$ reflexivní. Cílem bude dokázat, že v prostoru $E^p(\Omega)$ jsou husté funkce hladké až do hranice. K tomu budeme potřebovat pojem hvězdicovité oblasti.

Definice 2.3.2. *Oblast $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ se nazývá hvězdicovitá vzhledem k bodu $x_0 \in \Omega$, jestliže existuje spojitá kladná funkce h: $\partial B_1 \to \mathbf{R}$ taková, že*

$$\Omega = \Big\{ x \in \mathbf{R}^N ; |x - x_0| < h\Big(\frac{x - x_0}{|x - x_0|}\Big)\Big\}.$$

Oblast $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ se nazývá hvězdicovitá vzhledem ke kouli $B \subset \Omega$, je-li hvězdicovitá vzhledem ke všem bodům $x \in B$.

Oblasti s lipschitzovskou hranicí lze rozložit na hvězdicovité oblasti. Platí (viz [10]):

Lemma 2.3.1. *Nechť $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ je omezená oblast s lipschitzovskou hranicí. Potom existuje třída otevřených oblastí*

$$\mathcal{G} = \{G_1, G_2, \dots, G_r, G_{r+1}, \dots, G_{r+m}\}, \quad r, m \in \mathbf{N}$$

takových, že

(i) $\overline{\Omega} \subset \bigcup_{i=1}^{r+m} G_i$

(ii) $\partial\Omega \subset \bigcup_{i=1}^{r} G_i$

(iii) existuje třída koulí

$$\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \dots, B_{r+m}\}$$

takových, že každá oblast

$$\Omega_i = \Omega \cap G_i, \qquad i = 1, \dots, r+m$$

je hvězdicovitá vzhledem ke kouli B_i.

Nechť dále $f \in C_0^\infty(\Omega)$ a $\int_\Omega f \,\mathrm{d}x = 0$. Potom existuje třída funkcí

$$\mathcal{F} = \{f_1, \dots, f_r, f_{r+1}, \dots, f_{r+m}\}$$

takových, že

(i) $f_i \in C_0^\infty(\Omega_i)$, $\int_{\Omega_i} f_i \,\mathrm{d}x = 0$

(ii) $f(x) = \sum_{i=1}^{r+m} f_i(x)$

(iii)

$$\|f_i\|_{k,q,\Omega_i} \le C(m, q, \Omega_1, \dots, \Omega_{r+m}, \Omega)\|f\|_{k,q,\Omega},$$

$1 < q < \infty$, $k = 0, 1, \dots$.

Platí:

Věta 2.3.1. *Nechť $\Omega \in C^{0,1}$, $1 \le p < \infty$.*

Potom $E^p(\Omega) = \overline{(C^\infty(\overline{\Omega}))^N}^{\|\cdot\|_{E^p(\Omega)}}$.

Důkaz. Nebudeme dělat, pouze naznačíme jeho ideu:

a) $\Omega = \mathbf{R}^N$ výsledek plyne přímo regularizací

b) $\Omega = C^{0,1}$, omezená oblast

použijeme lokální popis hranice a rozklad jednotky

$$\Omega \subset V \cup \bigcup_{i=1}^{m} V_i$$

na V použijeme regularizaci

na V_i vhodnou translací a opětovným použitím rozkladu jednotky lze převést oblast V_i^+ (tj. $V_i \cap \Omega$) na oblasti, které jsou hvězdicovité vzhledem k počátku, viz Lemma 2.3.1 (zde se použije toho, že $\Omega \in C^{0,1}$!). Na hvězdicovité oblasti si nejprve funkci „vysuneme“ ven pomocí

$$\mathbf{u}^\lambda(x) = \mathbf{u}\left(\frac{x}{\lambda}\right), \quad \lambda > 1$$

a tato vysunutá funkce se zregularizuje. Limitou $\lambda \to 1^+$ a $h \to 0^+$ (regularizační faktor) se ukáže, že $\mathbf{u}_n \to \mathbf{u}$ v $E^p(\Omega)$, $\mathbf{u}_n \in (C^\infty(\Omega))^N$, kde

$$\mathbf{u}_n(x) = \left(\mathbf{u}^{\lambda_n}\right)_{h_n}.$$

Přesný důkaz je možno nalézt např. v knize [32]. ∎

2.3.2 Sobolevovy prostory s nulovou divergencí

Speciálně nás budou zajímat prostory typu

$$W^{1,p}_{0,\mathrm{div}}(\Omega) = \left\{\mathbf{u} \in (W^{1,p}_0(\Omega))^N; \operatorname{div}\mathbf{u} = 0\right\},$$

resp.

$$\overline{W^{1,p}_{0,\mathrm{div}}(\Omega)} = \overline{\{\mathbf{u} \in (C_0^\infty(\Omega))^N; \operatorname{div}\mathbf{u} = 0\}}^{\|\cdot\|_{1,p}}.$$

Ukažme, že pro $\Omega \in C^{0,1}$ jsou oba prostory totožné. To je založeno na následujícím výsledku

Lemma 2.3.2 (Bogovskii, Solonnikov, Ladyženská, Borchers, Sohr aj.)**.** *Nechť $\Omega \in C^{0,1}$ je omezená oblast v $\mathbf{R}^N$. Nechť $f \in W_0^{m,q}(\Omega)$, $m \geq 0$, $1 < q < \infty$, $\int_\Omega f \,\mathrm{d}x = 0$. Potom $\exists \boldsymbol{v} \in (W_0^{m+1,q}(\Omega))^N$, které je řešením*

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\boldsymbol{v} &= f \quad v\,\Omega, \\ \boldsymbol{v}|_{\partial\Omega} &= \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

takovým, že

$$\|\nabla \boldsymbol{v}\|_{m,q} \leq C\,\|f\|_{m,q},$$

kde C nezávisí na f. Speciálně, je-li $f \in C_0^\infty(\Omega)$, pak též $\boldsymbol{v} \in (C_0^\infty(\Omega))^N$.

Je-li $f = \operatorname{div}\boldsymbol{g}$, $\boldsymbol{g} \in E_0^q(\Omega)$, pak také

$$\|\boldsymbol{v}\|_q \leq C\|\boldsymbol{g}\|_q.$$

Navíc je operátor $T\colon \{f \in W_0^{m,q}(\Omega)\colon \int_\Omega f\,\mathrm{d}x = 0\} \to (W_0^{m+1,q}(\Omega))^N$ takový, že $Tf = \boldsymbol{v}$, lineární (to samé platí i pro případ $f = \operatorname{div}\boldsymbol{g}$, kde $\boldsymbol{g} \in E_0^q(\Omega)$.)

Důkaz. Důkaz je uveden v Appendixu k tomuto textu, viz Věta 4.2.1, popř. je ho možno nalézt i v [11] či [26].

■

Lemma 2.3.3. *Nechť* $\Omega \in C^{0,1}$. *Potom* $W^{1,p}_{0,\mathrm{div}}(\Omega) = \overline{W^{1,p}_{0,\mathrm{div}}(\Omega)}$.

Důkaz. Zřejmě $\overline{W^{1,p}_{0,\mathrm{div}}(\Omega)} \subseteq W^{1,p}_{0,\mathrm{div}}(\Omega)$. Ukažme druhou inkluzi. Nechť $\mathbf{u} \in W^{1,p}_{0,\mathrm{div}}(\Omega)$. Nechť $\mathbf{u}_n \in (C_0^\infty(\Omega))^N$ jsou takové, že $\|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}\|_{1,p} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Obecně máme ale $\operatorname{div} \mathbf{u}_n \neq 0$. Nicméně $\operatorname{div} \mathbf{u}_n \xrightarrow[L^p(\Omega)]{} \operatorname{div} \mathbf{u} = 0$. Z Lemmatu 2.3.2 plyne, že úloha

$$
\begin{aligned}
\operatorname{div} \mathbf{v}_n &= \operatorname{div} \mathbf{u}_n, \\
\mathbf{v}_n|_{\partial\Omega} &= 0, \\
\|\nabla \mathbf{v}_n\|_p &\leq C \|\operatorname{div} \mathbf{u}_n\|_p
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

(a díky podmínce na hranici i $\|\mathbf{v}_n\|_p \leq C(\Omega) \|\nabla \mathbf{v}_n\|_p$) má řešení (podmínka kompatibility $0 = \int_\Omega \operatorname{div} \mathbf{u}_n \,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \mathbf{u}_n \cdot \mathbf{n} \,\mathrm{d}S$ je triviálně splněna) takové, že $\mathbf{v}_n \in (C_0^\infty(\Omega))^N$. Navíc, protože $\operatorname{div} \mathbf{u}_n \to 0$ v $L^p(\Omega)$, je nutně pro nekonečně mnoho $n \in \mathbf{N}$ $\mathbf{u}_n \neq \mathbf{v}_n$.[1] Položme $\mathbf{w}_n = \mathbf{u}_n - \mathbf{v}_n$. Potom

a) $\operatorname{div} \mathbf{w}_n = \operatorname{div} \mathbf{u}_n - \operatorname{div} \mathbf{v}_n = 0$,

b) $\|\mathbf{w}_n - \mathbf{u}\|_{1,p} \leq \|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}\|_{1,p} + \|\mathbf{v}_n\|_{1,p} \to 0$,

c) $\mathbf{w}_n \in (C_0^\infty(\Omega))^N$,

tj. $\mathbf{u} \in \overline{W^{1,p}_{0,\mathrm{div}}(\Omega)}$. ■

Poznámka. S jistou modifikací by výsledek prošel i např. pro Ω vnější oblast nebo $\Omega = \mathbf{R}^N$, viz Appendix. Existují ale oblasti, kde rovnost prostorů nenastává, např. oblasti s více exity do nekonečna.

2.3.3 Rozklad funkcí z $(L^2(\Omega))^N$. Existence tlaku.

Budeme uvažovat prostory typu

$$
\overline{L^2_{0,\mathrm{div}}(\Omega)} = \overline{\{\mathbf{u} \in (C_0^\infty(\Omega))^N ; \operatorname{div} \mathbf{u} = 0\}}^{\|\cdot\|_2}.
$$

Cílem bude jednak charakterizovat tento prostor a jednak ukázat, že prostor $(L^2(\Omega))^N = \overline{L^2_{0,\mathrm{div}}(\Omega)} \oplus P$, kde budeme doplněk P charakterizovat.

Nechť $1 < p < \infty$. Označme $W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$ obor hodnot operátoru stop z $W^{1,p}(\Omega)$. Připomeňme, že náš prostor $W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$ — neceločíselná derivace — je něco jako interpolační prostor mezi $L^p(\partial\Omega)$ a $W^{1,p}(\partial\Omega)$, přesněji

$$
\|u\|_{W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)} = \|u\|_{L^p(\partial\Omega)} + \Big(\int_{\partial\Omega}\int_{\partial\Omega} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+p-2}} \,\mathrm{d}S_x \mathrm{d}S_y\Big)^{\frac{1}{p}}.
$$

Označme $W^{-\frac{1}{p'},p'}(\partial\Omega) = (W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega))^*$, $p' = \frac{p}{p-1}$. Nechť $\mathbf{u} \in \big(C^\infty(\overline{\Omega})\big)^N$, $v \in C^\infty(\overline{\Omega})$, $\Omega \in C^{0,1}$. Potom

$$
\int_\Omega \mathbf{u} \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x + \int_\Omega v \operatorname{div} \mathbf{u} \,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})\, v \,\mathrm{d}S.
$$

[1] Kromě případu, kdy $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, který je ale nezajímavý, či situace, kdy $\operatorname{div} \mathbf{u}_n = 0$ pro všechna n, kdy není třeba opravu dělat.

Protože $\Omega \in C^{0,1}$, normála $\mathbf{n}$ existuje s.v. na $\partial\Omega$. Levá strana má smysl i pro $\mathbf{u} \in E^p(\Omega)$, $v \in W^{1,p'}(\Omega)$[2]. Napravo je $v \in W^{1-\frac{1}{p'},p'}(\partial\Omega)$; v jistém smyslu budeme moci tuto Greenovu formuli rozšířit i pro tyto funkce.

Věta 2.3.2. *Nechť $\Omega \in C^{0,1}$, $1 < p < \infty$. Potom existuje spojitý lineární operátor $\gamma_{\boldsymbol{n}}$ z $E^p(\Omega)$ do $W^{-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega) = (W^{1-\frac{1}{p'},p'}(\partial\Omega))^*$ takový, že*

$$\gamma_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}|_{\partial\Omega} \quad pro \quad \boldsymbol{u} \in (C^\infty(\overline{\Omega}))^N.$$

Pro $\boldsymbol{u} \in E^p(\Omega)$, $v \in W^{1,p'}(\Omega)$ platí

$$\int_\Omega \boldsymbol{u}\cdot\nabla v\,\mathrm{d}x + \int_\Omega v\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}x = \langle\gamma_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{u}, Tv\rangle_{W^{-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega),W^{1-\frac{1}{p'},p'}(\partial\Omega)},$$

kde Tv je stopa funkce v ($Tv \in W^{1-\frac{1}{p'},p'}(\partial\Omega)$).

Důkaz. Nechť $\varphi \in W^{1-\frac{1}{p'},p'}(\partial\Omega)$, $v \in W^{1,p'}(\Omega)$ tak, že $\varphi = Tv$. Pro $\mathbf{u} \in E^p(\Omega)$ položme

$$X_{\mathbf{u}}(\varphi) = \int_\Omega (v\,\mathrm{div}\,\mathbf{u} + \mathbf{u}\cdot\nabla v)\,\mathrm{d}x.$$

Hodnota $X_{\mathbf{u}}(\varphi)$ nezávisí na v, ale pouze na její stopě $Tv = \varphi$. Totiž, nechť $v_1, v_2 \in W^{1,p'}(\Omega)$ jsou takové, že platí $Tv_1 = Tv_2 = \varphi$. Položme $v = v_1 - v_2$. Ukažme, že

$$\int_\Omega (v\,\mathrm{div}\,\mathbf{u} + \mathbf{u}\cdot\nabla v)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Pro $v \in W_0^{1,p'}(\Omega)$ existuje $v_m \in C_0^\infty(\Omega)$, že platí $v_m \to v$ v $W^{1,p'}(\Omega)$, pro $\mathbf{u} \in E^p(\Omega)$, existuje $\mathbf{u}_m \in (C^\infty(\overline{\Omega}))^N$, že platí $\mathbf{u}_m \to \mathbf{u}$ v $E^p(\Omega)$. Zřejmě

$$0 = \int_\Omega (v_m\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}_m + \mathbf{u}_m\cdot\nabla v_m)\,\mathrm{d}x \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \int_\Omega (v\,\mathrm{div}\,\mathbf{u} + \mathbf{u}\cdot\nabla v)\,\mathrm{d}x.$$

Tedy díky inverzní větě o stopách máme pro vhodné v (můžeme brát libovolné v, tedy speciálně vezmeme to, které získáme z inverzní věty o stopách)

$$X_{\mathbf{u}}(\varphi) \le \|\mathbf{u}\|_{E^p(\Omega)}\|v\|_{W^{1,p'}(\Omega)} \le C_0\|\mathbf{u}\|_{E^p(\Omega)}\|\varphi\|_{W^{1-\frac{1}{p'},p'}(\partial\Omega)}.$$

Pro pevné $\mathbf{u} \in E^p(\Omega)$ je $X_{\mathbf{u}}(\cdot) \in (W^{1-\frac{1}{p'},p'}(\partial\Omega))^*$, a tedy existuje $g = g(\mathbf{u}) \in W^{-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$ tak, že

$$X_{\mathbf{u}}(\varphi) = \langle g,\varphi\rangle_{W^{-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega),W^{1-\frac{1}{p'},p'}(\partial\Omega)} \quad \forall\varphi \in W^{1-\frac{1}{p'},p'}(\partial\Omega).$$

Zřejmě zobrazení: $\mathbf{u} \mapsto g(\mathbf{u})$ je lineární, $\|g\|_{W^{-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)} \le C_0\|\mathbf{u}\|_{E^p(\Omega)}$. Zbývá dokázat, že pro $\mathbf{u} \in (C^\infty(\overline{\Omega}))^N$ je $g(\mathbf{u}) = \mathbf{u}\cdot\mathbf{n}|_{\partial\Omega}$. Nechť tedy $\mathbf{u} \in \left(C^\infty(\overline{\Omega})\right)^N$, $v \in C^\infty(\overline{\Omega})$. Potom

$$X_{\mathbf{u}}(Tv) = \int_\Omega \mathrm{div}\,(v\mathbf{u})\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} v\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S = \int_{\partial\Omega}(Tv)\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S = \langle\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}, Tv\rangle.$$

[2]Ve skutečnosti stačí mít $\mathrm{div}\,\mathbf{u} \in (W^{1,p}(\Omega))^*$ a $\mathbf{u} \in (L^p(\Omega))^N$, pokud chápeme dualitu ve smyslu

$$\langle\mathrm{div}\,\mathbf{u},\varphi\rangle_{(W^{1,p'}(\Omega))^*,W^{1,p'}(\Omega)} := -\int_\Omega \mathbf{u}\cdot\nabla v\,\mathrm{d}x + \langle\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}, v\rangle_{W^{-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega),W^{1-\frac{1}{p'},p'}(\Omega)},$$

to ale není to samé jako tvrzení věty.

Protože $T\left(C^\infty(\overline{\Omega})\right)$ je hustý v $W^{1-\frac{1}{p'},p'}(\partial\Omega)$ (neboť máme $W^{1-\frac{1}{p'},p'}(\partial\Omega) = T\big(W^{1,p'}(\Omega)\big)$ a $C^\infty(\overline{\Omega})$ je husté v $W^{1,p'}(\Omega)$), platí rovnost

$$X_{\mathbf{u}}(\varphi) = \langle \mathbf{u}\cdot\mathbf{n}, \varphi\rangle_{W^{-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega), W^{1-\frac{1}{p'},p'}(\partial\Omega)} \quad \forall\varphi \in W^{1-\frac{1}{p'},p'}(\partial\Omega).$$

Potom

$$g(\mathbf{u}) = \mathbf{u}\cdot\mathbf{n}|_{\partial\Omega} \ \text{ pro } \mathbf{u} \in \left(C^\infty(\overline{\Omega})\right)^N.$$

■

Než se nám podaří charakterizovat $\overline{L^2_{0,\mathrm{div}}(\Omega)}$, budeme potřebovat lemma o existenci tlaku. Platí následující

Lemma 2.3.4. *Nechť $\Omega \in C^{0,1}$, $1 < q < \infty$ a nechť $\boldsymbol{G} \in \left(\left(W_0^{1,q}(\Omega)\right)^N\right)^*$ $\left(= \left(W^{-1,q'}(\Omega)\right)^N\right)$ je takový, že*

$$\langle \boldsymbol{G}, \boldsymbol{\varphi}\rangle_{((W_0^{1,q}(\Omega))^N)^*,(W_0^{1,q}(\Omega))^N} = \langle \boldsymbol{G}, \boldsymbol{\varphi}\rangle = 0 \ \ \forall\boldsymbol{\varphi} \in W^{1,q}_{0,\mathrm{div}}(\Omega).$$

Potom $\exists!\ p \in \widetilde{L^{q'}}(\Omega) = \{u \in L^{q'}(\Omega); \int_\Omega u \,\mathrm{d}x = 0\}$ takové, že

$$\langle \boldsymbol{G}, \boldsymbol{\varphi}\rangle = \int_\Omega p \operatorname{div}\boldsymbol{\varphi}\,\mathrm{d}x \ \ \forall\boldsymbol{\varphi} \in \left(W_0^{1,q}(\Omega)\right)^N.$$

K důkazu budeme potřebovat jedno lemma z funkcionální analýzy, viz např. [2, Theorème II.18].

Lemma 2.3.5. *Nechť $A\colon X \to Y$ je spojitý lineární operátor, $D(A) = X$, A^{-1} existuje a je spojitý. Nechť X, Y jsou reflexivní Banachovy prostory.*
Potom

$$R\left(A^*\right) = (\ker A)^{\perp\,3} = \left\{f \in X^*; \langle f, u\rangle = 0 \ \ \forall u \in \ker A\right\}.$$

■

Důkaz (Lemmatu 2.3.4)**.** Uvažujme $A\colon (W_0^{1,q}(\Omega))^N \to \widetilde{L^q}(\Omega)$, $A\mathbf{v} = \operatorname{div}\mathbf{v}$. Vezmeme speciální větev A^{-1}, tzv. „Bogovského operátor“, tj. řešící operátor úlohy

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\mathbf{w} &= \operatorname{div}\mathbf{v} \quad \text{v } \Omega, \\ \mathbf{w}|_{\partial\Omega} &= 0, \\ \|\mathbf{w}\|_{1,q} &\le C\,\|\operatorname{div}\mathbf{v}\|_q\,, \end{aligned}$$

viz Lemma 2.3.2. Tento operátor je lineární a omezený, tedy spojitý. Víme proto, že

$$(\ker A)^\perp = R\left(A^*\right).$$

Zřejmě

$$\ker A = \left\{\mathbf{u} \in \left(W_0^{1,q}(\Omega)\right)^N;\ \operatorname{div}\mathbf{u} = 0\right\},$$

tedy $\mathbf{G} \in (\ker A)^\perp = R\left(A^*\right)$. Protože $Y = \widetilde{L^q}(\Omega)$, je

$$Y^* = \left\{L^{q'}(\Omega)|_{\mathbf{R}}\right\}^4.$$

[3] tady tzv. anihilátor

[4] faktorprostor (a lze jej speciálně reprezentovat pomocí $\widetilde{L^{q'}}(\Omega)$)

Vzhledem k tomu, že $\langle A^* v, u\rangle_{X^*,X} = \langle v, Au\rangle_{Y^*,Y}$, platí

$$\langle \mathbf{G}, \boldsymbol{\varphi}\rangle = \int_\Omega \underbrace{p}_{p\in \widetilde{L^{q'}}(\Omega)} A\boldsymbol{\varphi}\,\mathrm{d}x = \int_\Omega p \operatorname{div}\boldsymbol{\varphi}\,\mathrm{d}x.$$

■

Nyní je vše připraveno k charakterizaci $\overline{L^2_{0,\mathrm{div}}(\Omega)}$:

Věta 2.3.3. *Nechť* $\Omega \in C^{0,1}$.
Potom

$$\overline{L^2_{0,\mathrm{div}}(\Omega)} = \left\{\boldsymbol{u} \in \left(L^2(\Omega)\right)^N;\ \operatorname{div}\boldsymbol{u} = 0 \ v\ \mathcal{D}'(\Omega);\ \gamma_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{u}) = 0\right\}\left(=: L^2_{0,\mathrm{div}}(\Omega)\right)$$

$$\left(\overline{L^2_{0,\mathrm{div}}(\Omega)}\right)^{\perp\,5} = \left\{\boldsymbol{v} \in \left(L^2(\Omega)\right)^N;\ \boldsymbol{v} = \nabla p,\ p \in W^{1,2}(\Omega)\right\}(=: P)\,.$$

Důkaz. *Krok 1.* Nechť $\mathbf{v} \in P$. Potom $\forall \mathbf{w} \in \left\{\mathbf{w} \in (C_0^\infty(\Omega))^N;\operatorname{div}\mathbf{w} = 0\right\}$

$$\int_\Omega \mathbf{v}\cdot\mathbf{w}\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \mathbf{w}\cdot\nabla p\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega p\operatorname{div}\mathbf{w}\,\mathrm{d}x = 0,$$

tj. $\mathbf{v} \in \left(\overline{L^2_{0,\mathrm{div}}(\Omega)}\right)^\perp$. Obráceně, nechť $\mathbf{v} \in \left(\overline{L^2_{0,\mathrm{div}}(\Omega)}\right)^\perp$. Tedy

$$\int_\Omega \mathbf{v}\cdot\mathbf{w}\,\mathrm{d}x = 0 \quad \forall \mathbf{w} \in \overline{L^2_{0,\mathrm{div}}(\Omega)},$$

speciálně i $\forall \mathbf{w} \in \underbrace{\overline{\{\mathbf{w} \in (C_0^\infty(\Omega))^N; \operatorname{div}\mathbf{w} = 0\}}^{\|\cdot\|_{1,2}}}_{=W^{1,2}_{0,\mathrm{div}}(\Omega)} \subset \overline{L^2_{0,\mathrm{div}}(\Omega)}$. Díky Lemmatu 2.3.4 tedy existuje $p \in \widetilde{L^2}(\Omega)$, pro něž platí

$$\int_\Omega \mathbf{v}\cdot\mathbf{w}\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega p\operatorname{div}\mathbf{w}\,\mathrm{d}x \quad \forall \mathbf{w} \in (C_0^\infty(\Omega))^N.$$

Odtud plyne, že $\mathbf{v} = \nabla p$ v $\mathcal{D}'(\Omega)$ tj. $p \in W^{1,2}(\Omega)$. Tedy $\left(\overline{L^2_{0,\mathrm{div}}(\Omega)}\right)^\perp \subset P$ a dohromady $\left(\overline{L^2_{0,\mathrm{div}}(\Omega)}\right)^\perp = P$.

Krok 2. Nechť $\mathbf{u} \in \overline{L^2_{0,\mathrm{div}}(\Omega)}$. Potom existuje $\mathbf{u}_m \in (C_0^\infty(\Omega))^N$, $\operatorname{div}\mathbf{u}_m = 0$: $\mathbf{u}_m \to \mathbf{u}$ v $(L^2(\Omega))^N$. Dále

$$0 = \int_\Omega \operatorname{div}\mathbf{u}_m \varphi\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega \mathbf{u}_m\cdot\nabla\varphi\,\mathrm{d}x \quad \forall\varphi \in C_0^\infty(\Omega),$$

tedy pro $m \to \infty$

$$0 = -\int_\Omega \mathbf{u}\cdot\nabla\varphi\,\mathrm{d}x \quad \forall\varphi \in C_0^\infty(\Omega),$$

a proto $\operatorname{div}\mathbf{u} = 0$ v $\mathcal{D}'(\Omega)$. Máme $\mathbf{u} \in E^2(\Omega)$, a tedy (připomeňme, že $\mathbf{u}_m \to \mathbf{u}$ v $E^2(\Omega)$)

$$0 = \gamma_{\mathbf{n}}(\mathbf{u}_m) \to \gamma_{\mathbf{n}}(\mathbf{u}) = 0 \Longrightarrow \mathbf{u} \in L^2_{0,\mathrm{div}}(\Omega).$$

[5] zde ortogonální doplněk

Obráceně, nechť $\overline{L^2_{0,\mathrm{div}}(\Omega)} \subsetneq L^2_{0,\mathrm{div}}(\Omega)$. Nechť $\mathbf{u} \in H$, kde H označuje ortogonální doplněk $\overline{L^2_{0,\mathrm{div}}(\Omega)}$ do $L^2_{0,\mathrm{div}}(\Omega)$ (oba prostory jsou uzavřené!). Tedy dle kroku 1 $\exists p \in W^{1,2}(\Omega)$ tak, že $\mathbf{u} = \nabla p$. Potom ale

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}\mathbf{u} = \operatorname{div}(\nabla p) &= \Delta p = 0 \ \text{ v } \ \mathcal{D}'(\Omega), \\
\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}\,|_{\partial\Omega} &= \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} = 0 \ \text{ ve smyslu operátoru } \gamma_{\mathbf{n}}(\mathbf{u}), \\
& \big(\gamma_{\mathbf{n}}(\mathbf{u}) \in H^{-\frac12}(\partial\Omega)\big).
\end{aligned}$$

V prostoru $W^{1,2}(\Omega)$ existuje řešení této úlohy, jednoznačné až na aditivní konstantu, toto řešení je $p = const$, tj. $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ a $H = \{\mathbf{0}\}$. Tedy $\overline{L^2_{0,\mathrm{div}}(\Omega)} = L^2_{0,\mathrm{div}}(\Omega)$. ■

2.4 Stokesův problém

Uvažujme problém:

Hledáme $\mathbf{u} \in (C^2(\Omega))^N \cap (C(\overline{\Omega}))^N$, $p \in C^1(\Omega)$:

$$\begin{aligned}
-\Delta\mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f} \ \text{ v } \Omega, \\
\operatorname{div}\mathbf{u} &= 0 \ \text{ v } \Omega, \\
\mathbf{u}\,|_{\partial\Omega} &= \mathbf{0}.
\end{aligned}$$

Pro slabou formulaci máme dvě možnosti:

a) $\mathbf{u} \in (W^{1,2}_0(\Omega))^N$, $p \in L^2(\Omega)$, $\mathbf{f} \in (L^2(\Omega))^N$ (popřípadě $\mathbf{f} \in (W^{-1,2}(\Omega))^N$):

$$\int_\Omega \nabla\mathbf{u} : \nabla\boldsymbol{\varphi}\,\mathrm{d}x - \int_\Omega p \operatorname{div}\boldsymbol{\varphi}\,\mathrm{d}x = \underbrace{\int_\Omega \mathbf{f}\cdot\boldsymbol{\varphi}\,\mathrm{d}x}_{\text{popř.}\langle \mathbf{f},\boldsymbol{\varphi}\rangle} \quad \forall \boldsymbol{\varphi} \in (C^\infty_0(\Omega))^N$$

$\big($popř. $\forall\boldsymbol{\varphi} \in (W^{1,2}_0(\Omega))^N\big)$,

spolu s

$$\int_\Omega \mathbf{u}\cdot\nabla\psi\,\mathrm{d}x = 0 \qquad \forall\psi \in W^{1,2}(\Omega).$$

b) $\mathbf{u} \in W^{1,2}_{0,\mathrm{div}}(\Omega)$, $\mathbf{f} \in (L^2(\Omega))^N$ (popřípadě $\mathbf{f} \in (W^{-1,2}(\Omega))^N$):

$$\int_\Omega \nabla\mathbf{u} : \nabla\boldsymbol{\varphi}\,\mathrm{d}x = \underbrace{\int_\Omega \mathbf{f}\cdot\boldsymbol{\varphi}\,\mathrm{d}x}_{\text{popř.}\langle \mathbf{f},\boldsymbol{\varphi}\rangle} \quad \forall\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{V} = \{\mathbf{w} \in (C^\infty_0(\Omega))^N; \operatorname{div}\mathbf{w} = 0\}$$

$\big($popř. $\forall\boldsymbol{\varphi} \in W^{1,2}_{0,\mathrm{div}}(\Omega)\big)$.

Otázkou je, zda formulace b) nějak neztratí informaci o tlaku. Ukazuje se, že ne. Máme totiž z Lemmatu 2.3.4 pro

$$\langle \mathbf{G},\boldsymbol{\varphi}\rangle = \int_\Omega (\nabla\mathbf{u} : \nabla\boldsymbol{\varphi} - \mathbf{f}\cdot\boldsymbol{\varphi})\,\mathrm{d}x,$$

že

- $\mathbf{G} \in (W^{-1,2}(\Omega))^N$,

- $\langle \mathbf{G}, \boldsymbol{\varphi} \rangle = 0 \ \ \forall \boldsymbol{\varphi} \in W^{1,2}_{0,\mathrm{div}}(\Omega)$,

a tedy $\exists! p \in L^2(\Omega)$, $\int_\Omega p \, \mathrm{d}x = 0$:

$$\int_\Omega (\nabla \mathbf{u} : \nabla \boldsymbol{\varphi} - \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\varphi}) \, \mathrm{d}x = \int_\Omega p \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi} \, \mathrm{d}x \quad \forall \boldsymbol{\varphi} \in W^{1,2}_0(\Omega),$$

což je přesně to, co je uvedeno výše. Proto je výhodnější formulace b), neboť

Věta 2.4.1. *Nechť $\boldsymbol{f} \in (W^{-1,2}(\Omega))^N$.*

Potom existuje právě jedno slabé řešení Stokesova problému ve smyslu b) výše. Navíc

$$\begin{aligned} \|\nabla \boldsymbol{u}\|_2 &\leq C \, \|\boldsymbol{f}\|_{-1,2} \, , \\ \|p\|_2 &\leq C \, \|\boldsymbol{f}\|_{-1,2} \, , \end{aligned}$$

kde tlak p je zkonstruován výše tak, aby byla splněna slabá formulace a).

Důkaz. Existence jediného $\mathbf{u}$, včetně odhadu, plyne z Lax–Milgramova lemmatu, existence tlaku z Lemmatu 2.3.4. Navíc, pokud použijeme ve slabé formulaci ve tvaru b) výše (uvědomme si, že to již teď můžeme) jako testovací funkci $\boldsymbol{\varphi}$, řešení úlohy

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi} &= p, \\ \boldsymbol{\varphi} \, |_{\partial\Omega} &= 0, \end{aligned}$$

máme

$$\int_\Omega p^2 \, \mathrm{d}x = \langle \mathbf{f}, \boldsymbol{\varphi} \rangle + \int_\Omega \nabla \mathbf{u} : \nabla \boldsymbol{\varphi} \, \mathrm{d}x \quad \Longrightarrow \quad \|p\|_2 \leq C \left(\|\mathbf{f}\|_{-1,2} + \|\nabla \mathbf{u}\|_2 \right).$$

■

Poznámka. Pokud bereme $\mathbf{f} \in \left(W^{1,2}_{0,\mathrm{div}}(\Omega) \right)^*$, pak existence slabého řešení $\mathbf{u}$ projde, ale není jasná existence tlaku — proto pozor!

Obecně pak (důkaz viz kniha [10]):

Věta 2.4.2. *Nechť $m \geq -1$, $1 < q < \infty$. Nechť $\boldsymbol{f} \in (W^{m,q}(\Omega))^N$, $\Omega \in C^{\max\{m+2,2\}}$, $\boldsymbol{u}_* \in (W^{m+2-\frac{1}{q},q}(\partial\Omega))^N$, $\int_{\partial\Omega} \boldsymbol{u}_* \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}S = 0$.*

Potom existuje právě jedno slabé řešení Stokesova problému s nehomogenní okrajovou podmínkou takové, že

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} &\in (W^{m+2,q}(\Omega))^N, \\ p &\in W^{m+1,q}(\Omega), \ \int_\Omega p \, \mathrm{d}x = 0 \end{aligned} \tag{2.10}$$

a $\exists C = C(\Omega, N, q)$, že

$$\|\boldsymbol{u}\|_{m+2,q} + \|p\|_{m+1,q} \leq C(\|\boldsymbol{f}\|_{m,q} + \|\boldsymbol{u}_*\|_{m+2-\frac{1}{q},q,\partial\Omega}).$$

■

Poznámka. Slabým řešením zde nazýváme $\mathbf{u} \in (W^{1,q}(\Omega))^N$ takové, že $\mathbf{u}-\mathbf{u}_* \in (W_0^{1,q}(\Omega))^N$, a

$$\int_\Omega \nabla \mathbf{u} : \nabla \boldsymbol{\varphi} \,\mathrm{d}x = \langle \mathbf{f}, \boldsymbol{\varphi} \rangle \quad \forall \boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{V} = \left\{ \mathbf{w} \in (C_0^\infty(\Omega))^N ; \operatorname{div} \mathbf{w} = 0 \right\}.$$

Vraťme se k situaci $q = 2$. Označme Λ řešící operátor Stokesova problému s homogenní okrajovou podmínkou, tedy

$$\Lambda : L^2_{0,\mathrm{div}}(\Omega) \longrightarrow W^{1,2}_{0,\mathrm{div}}(\Omega) \subset (W_0^{1,2}(\Omega))^N,$$

tak, že

$$\Lambda \mathbf{f} = \mathbf{u},$$

kde $\mathbf{u}$ je slabé řešení Stokesova problému. (Uvědomme si, že obecné $\mathbf{f} \in (L^2(\Omega))^N$ můžeme rozložit následovně:

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_1 + \nabla \pi,$$

kde $\mathbf{f}_1 \in L^2_{0,\mathrm{div}}(\Omega)$ a π můžeme přidat do tlaku, a proto uvažovat pravé strany rovnou z $L^2_{0,\mathrm{div}}(\Omega)$ je v pořádku).

Lemma 2.4.1. *Operátor Λ je jakožto operátor z $L^2_{0,\mathrm{div}}(\Omega)$ do $L^2_{0,\mathrm{div}}(\Omega)$ samoadjungovaný a kompaktní.*

Důkaz. Operátor je zřejmě lineární, omezený, $D(\Lambda) = L^2_{0,\mathrm{div}}(\Omega)$, dále $R(\Lambda) \subset W^{1,2}_{0,\mathrm{div}}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^2_{0,\mathrm{div}}(\Omega)$, a proto je kompaktní.

Nechť $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in L^2_{0,\mathrm{div}}(\Omega)$. Potom pro $\Lambda \mathbf{u} = \mathbf{f}$, $\Lambda \mathbf{v} = \mathbf{g}$ platí

$$\int_\Omega \Lambda \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \,\mathrm{d}x = \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \,\mathrm{d}x \overbrace{=}^{\Lambda v = g} \int_\Omega \nabla \mathbf{f} : \nabla \mathbf{g} \,\mathrm{d}x \overbrace{=}^{\Lambda u = f} \int_\Omega \mathbf{u} \cdot \mathbf{g} \,\mathrm{d}x = \int_\Omega \mathbf{u} \cdot \Lambda \mathbf{v} \,\mathrm{d}x.$$

Proto máme $\forall \mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in L^2_{0,\mathrm{div}}(\Omega) = D(\Lambda)$, že $(\Lambda \mathbf{u}, \mathbf{v})_{L^2_{0,\mathrm{div}}(\Omega)} = (\mathbf{u}, \Lambda \mathbf{v})_{L^2_{0,\mathrm{div}}(\Omega)}$, tj. $D(\Lambda) \subseteq D(\Lambda^*)$. Protože $D(\Lambda) = L^2_{0,\mathrm{div}}(\Omega)$, je nutně též $D(\Lambda^*) = L^2_{0,\mathrm{div}}(\Omega)$ a operátor Λ je samoadjungovaný. ∎

Poznámka. Vlastní funkce operátoru Λ tvoří ortonormální bázi na prostoru $L^2_{0,\mathrm{div}}(\Omega)$,

$$\Lambda \mathbf{w}^j = \frac{1}{\lambda_j} \mathbf{w}^j \qquad j \in \mathbf{N}\ , \ \lambda_j \to \infty \ \text{ pro } \ j \to \infty.$$

Zřejmě

$$\int_\Omega \nabla \mathbf{w}^j : \nabla \mathbf{v} \,\mathrm{d}x = \lambda_j \int_\Omega \mathbf{w}^j \cdot \mathbf{v} \,\mathrm{d}x \quad \forall \mathbf{v} \in W^{1,2}_{0,\mathrm{div}}(\Omega)$$

a

$$\int_\Omega \mathbf{w}^j \cdot \mathbf{w}^i \,\mathrm{d}x = \delta_{ij} \Rightarrow \int_\Omega \nabla \mathbf{w}^j : \nabla \mathbf{w}^i \,\mathrm{d}x = \lambda_j \delta_{ij},$$

a tudíž $\left\{ \mathbf{w}^j \right\}_{j=1}^\infty$ je ortogonální systém ve $W^{1,2}_{0,\mathrm{div}}(\Omega)$. Zřejmě je též bází ve $W^{1,2}_{0,\mathrm{div}}(\Omega)$ ($\int_\Omega \nabla \mathbf{w}^n : \nabla \boldsymbol{\varphi} \,\mathrm{d}x = 0 \ \forall n \Rightarrow \int_\Omega \mathbf{w}^n \cdot \boldsymbol{\varphi} = 0 \ \forall n \Rightarrow \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{0}$).

Dále, díky regularitě řešení Stokesova problému, je-li $\Omega \in C^{m+2}$, pak $\mathbf{w}^j \in (W^{m+2,2}(\Omega))^N$, $m \geq 0$ (a zřejmě $\mathbf{w}^j \in (C^\infty(\Omega))^N$ pro libovolnou Ω otevřenou).

Kapitola 3

Slabé řešení evolučních Navier–Stokesových rovnic

3.1 Existence slabého řešení

Připomeňme klasickou formulaci

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f} \quad \text{v } (0,T) \times \Omega, \\
\operatorname{div} \mathbf{u} &= 0 \quad \text{v } (0,T) \times \Omega, \\
\mathbf{u}\,|_{\partial\Omega} &= \mathbf{0} \quad \text{na } (0,T), \\
\mathbf{u}(0,x) &= \mathbf{u}_0(x) \quad \text{v } \Omega.
\end{aligned}
$$

Slabá formulace se získá tak, že násobíme rovnici $\boldsymbol{\varphi} \in (C_0^\infty(\Omega))^N$, $\operatorname{div} \boldsymbol{\varphi} = 0$ a integrujeme „per partes“:

$$
\int_\Omega \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \boldsymbol{\varphi} \,\mathrm{d}x + \int_\Omega (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\varphi} \,\mathrm{d}x + \nu \int_\Omega \nabla \mathbf{u} : \nabla \boldsymbol{\varphi} \,\mathrm{d}x + \int_\Omega p \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi} \,\mathrm{d}x = \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\varphi} \,\mathrm{d}x.
$$

Nejprve si uvědomme, že člen s tlakem je nulový. Dále nebudeme schopni ukázat, že $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \in L^1_{loc}(Q_T)$, proto místo skalárního součinu budeme uvažovat dualitu a navíc budeme pak moct brát obecnější pravou stranu.[1] Máme

Definice 3.1.1. *Nechť $\Omega \subset \mathbf{R}^N$, $N = 2,3$. Nechť $\boldsymbol{f} \in L^2(0,T;(W^{1,2}_{0,\mathrm{div}}(\Omega))^*)$, $\boldsymbol{u}_0 \in L^2_{0,\mathrm{div}}(\Omega)$.*

Potom funkce $\boldsymbol{u} \in L^2(0,T;W^{1,2}_{0,\mathrm{div}}(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;(L^2(\Omega))^N)$ s $\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} \in L^1(0,T;(W^{1,2}_{0,\mathrm{div}}(\Omega))^*)$ se nazývá slabým řešením Navier–Stokesových rovnic od-

[1] Také můžeme uvažovat časové závislou testovací funkci, nulovou v $t = T$, integrovat horní rovnici přes čas a časovou derivaci nahradit výrazem

$$
-\int_0^T \int_\Omega \mathbf{u} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t - \int_\Omega \mathbf{u}(0) \cdot \boldsymbol{\varphi}(0) \,\mathrm{d}x.
$$

povídající datům $\boldsymbol{f}$ a $\boldsymbol{u}_0$, jestliže

$$\left\langle \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}, \boldsymbol{\varphi} \right\rangle_{\left(W^{1,2}_{0,\mathrm{div}}(\Omega)\right)^*, W^{1,2}_{0,\mathrm{div}}(\Omega)} + \int_\Omega (\boldsymbol{u} \cdot \nabla \boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{\varphi} \,\mathrm{d}x + \nu \int_\Omega \nabla \boldsymbol{u} : \nabla \boldsymbol{\varphi} \,\mathrm{d}x$$
$$= \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{\varphi} \rangle_{\left(W^{1,2}_{0,\mathrm{div}}\right)^*, W^{1,2}_{0,\mathrm{div}}(\Omega)} \qquad \forall \boldsymbol{\varphi} \in W^{1,2}_{0,\mathrm{div}}(\Omega) \text{ a s.v. } t \in (0,T),$$
$$\lim_{t \to 0^+} \int_\Omega \boldsymbol{u}(t,\cdot) \cdot \boldsymbol{\varphi} \,\mathrm{d}x = \int_\Omega \boldsymbol{u}_0 \cdot \boldsymbol{\varphi} \,\mathrm{d}x \qquad \forall \boldsymbol{\varphi} \in L^2_{0,\mathrm{div}}(\Omega).$$

□

Poznámka. Případ $N > 3$ je možno řešit analogicky; to zde nebudeme dělat. Je třeba brát $\boldsymbol{\varphi}$ hladké, aby se dal smysl konvektivnímu členu, a uvažovat časovou derivaci v jiných prostorech.

Poznámka. Položme $V = W^{1,2}_{0,\mathrm{div}}(\Omega)$, $H = L^2_{0,\mathrm{div}}(\Omega)$. Protože dle dříve dokázaného je $\mathbf{u} \in C\left([0,T]\,; V^*\right) \cap L^\infty(0,T;H)$, máme $\mathbf{u} \in C\left([0,T]\,; H_w\right)$ díky Lemmatu 2.2.5 a v tomto smyslu chápeme počáteční podmínku, za předpokladu, že funkce $\mathbf{u}$ byla případně změněna na podmnožině časového intervalu míry nula. Díky Větě 2.3.3 dokonce máme, že $\mathbf{u} \in C([0,T];((L^2(\Omega))^N)_w)$. Uvidíme později, že pro počáteční podmínku umíme dokázat silnější výsledek: $\lim_{t\to 0^+} \|\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_0\|_2 = 0$.

Poznámka. Uvažujme „dostatečně hladké“ řešení Navier–Stokesových rovnic. Násobme rovnici (klasická formulace) $\mathbf{u}$ a integrujme přes Ω (respektive, položme $\boldsymbol{\varphi} := \mathbf{u}$ ve slabé formulaci)

$$\int_\Omega \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \mathbf{u} \,\mathrm{d}x + \int_\Omega (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} \,\mathrm{d}x + \nu \int_\Omega \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{u} \,\mathrm{d}x = \langle \mathbf{f}, \mathbf{u} \rangle,$$

1. člen: $\quad \dfrac{1}{2} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \|\mathbf{u}\|_2^2$

2. člen: $\quad \displaystyle\int_\Omega (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_\Omega \mathbf{u} \cdot \nabla |\mathbf{u}|^2 \,\mathrm{d}x$

$$= -\frac{1}{2} \int_\Omega \underbrace{(\operatorname{div} \mathbf{u})}_{=0} |\mathbf{u}|^2 \,\mathrm{d}x + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \underbrace{\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}}_{=0} |\mathbf{u}|^2 \,\mathrm{d}S.$$

Pokud integrujeme přes čas,

$$\int_\Omega |\mathbf{u}(t)|^2 \,\mathrm{d}x + 2\nu \int_0^t \int_\Omega |\nabla \mathbf{u}|^2 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}\tau = \int_\Omega |\mathbf{u}_0|^2 \,\mathrm{d}x + 2 \int_0^t \langle \mathbf{f}, \mathbf{u} \rangle \,\mathrm{d}\tau, \tag{3.1}$$

což je tzv. energetická rovnost. My ale pro $N = 3$ dokážeme pouze slabší tvrzení, energetickou nerovnost:

$$\int_\Omega |\mathbf{u}(t)|^2 \,\mathrm{d}x + 2\nu \int_0^t \int_\Omega |\nabla \mathbf{u}|^2 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}\tau \le \int_\Omega |\mathbf{u}_0|^2 \,\mathrm{d}x + 2 \int_0^t \langle \mathbf{f}, \mathbf{u} \rangle \,\mathrm{d}\tau \tag{3.2}$$

pro s.v. $t \in (0,T)$.

Definice 3.1.2. *Řešení budeme nazývat Leray–Hopfovým slabým řešením Navier–Stokesových rovnic, je-li $\mathbf{u}$ řešením slabým a navíc splňuje pro s.v. $t \in (0,T)$ nerovnost (3.2).* □

Cílem je dokázat následující výsledek:

Věta 3.1.1 (slabé řešení, $N = 2$). *Nechť $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ je omezená oblast a nechť $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{u}_0$ splňují předpoklady Definice 3.1.1 a $0 < T < \infty$. Potom existuje právě jedno slabé řešení Navier–Stokesových rovnic. Toto řešení je současně Leray–Hopfovým řešením a splňuje počáteční podmínku ve smyslu $\lim\limits_{t\to 0+} \|\boldsymbol{u}(t) - \boldsymbol{u}_0\|_2 = 0$. Navíc $\boldsymbol{u} \in C([0,T];(L^2(\Omega))^2)$ a také $\boldsymbol{u} \in C([0,T];L^2_{0,\mathrm{div}}(\Omega))$ a dále splňuje energetickou rovnost (3.1).*

Věta 3.1.2 (slabé řešení, $N = 3$). *Nechť $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ je omezená oblast, $\boldsymbol{f}$ a $\boldsymbol{u}_0$ splňují předpoklady Definice 3.1.1 a $0 < T < \infty$. Potom existuje alespoň jedno Leray–Hopfovo slabé řešení Navier–Stokesových rovnic. Toto řešení splňuje počáteční podmínku ve smyslu $\lim\limits_{t\to 0+} \|\boldsymbol{u}(t) - \boldsymbol{u}_0\|_2 = 0$.*

Důkaz obou vět budeme provádět paralelně a rozdělíme jej až na úplný závěr. Postup bude následující:

a) Galerkinovské aproximace — formulace

b) řešitelnost Galerkinovských aproximací + apriorní odhady pro $\mathbf{u}^n$

c) apriorní odhady pro časovou derivaci

d) limitní přechod

e) energetická nerovnost

f) nabývání počáteční podmínky

g) jednoznačnost a energetická rovnost pro $N = 2$

Ad a) Vezměme $\{\mathbf{w}^i\}_{i=1}^\infty$ ortogonální bázi prostoru $W^{1,2}_{0,\mathrm{div}}(\Omega)$ tvořenou vlastními funkcemi Stokesova problému. Navíc budeme předpokládat, že posloupnost $\{\mathbf{w}^i\}_{i=1}^\infty$ je normalizována v $L^2_{0,\mathrm{div}}(\Omega)$.

Definice 3.1.3. *Funkci $\boldsymbol{u}^n(t,x) = \sum\limits_{i=1}^n c_i^n(t)\boldsymbol{w}^i(x)$ budeme nazývat n-tou Galerkinovskou aproximací, jestliže*

$$\begin{aligned} \int_\Omega \frac{\partial \boldsymbol{u}^n}{\partial t} \cdot \boldsymbol{w}^j \,\mathrm{d}x + \int_\Omega (\boldsymbol{u}^n \cdot \nabla \boldsymbol{u}^n) \cdot \boldsymbol{w}^j \,\mathrm{d}x + \nu \int_\Omega (\nabla \boldsymbol{u}^n) : \left(\nabla \boldsymbol{w}^j\right) \mathrm{d}x \\ = \left\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{w}^j \right\rangle \qquad \forall j = 1,..,n, \\ \boldsymbol{u}^n(0,x) = \sum_{i=1}^n a_i \boldsymbol{w}^i(x), \end{aligned} \tag{3.3}$$

kde $a_i = \int_\Omega \boldsymbol{u}_0(x)\cdot\boldsymbol{w}^i(x)\,\mathrm{d}x$ (tj. $\boldsymbol{u}^n(0,x)$ je projekce $\boldsymbol{u}_0(x)$ do Lin $\{\boldsymbol{w}^i\}_{i=1}^n$ v $L^2_{0,\mathrm{div}}(\Omega)$). □

Rovnost (3.3) můžeme přepsat na systém obyčejných diferenciálních rovnic pro $\{c_i^n(t)\}_{i=1}^n$. Připomeňme, že $\int_\Omega \mathbf{w}^i \cdot \mathbf{w}^j \, \mathrm{d}x = \delta_{ij}$[2].

$$\begin{aligned} \dot{c}_j^n(t) + c_k^n(t) c_l^n(t) \int_\Omega \left(\mathbf{w}^k \cdot \nabla \mathbf{w}^l\right) \cdot \mathbf{w}^j \, \mathrm{d}x + \nu \underbrace{\lambda_j c_j^n(t)}_{\text{nesčítá se}} &= \left\langle \mathbf{f}, \mathbf{w}^j \right\rangle, \ j = 1,..,n, \\ c_j^n(0) &= a_j. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Kvůli lepší čitelnosti budeme nadále horní index n vynechávat.

Ad b) Na systém (3.4) můžeme použít Caratheodóryho teorii ODR (a kdyby $\mathbf{f} \in C([0,T]; ((W_0^{1,2}(\Omega))^*)^N)$, pak dokonce teorii klasickou). Existuje tedy (lokálně v čase) právě jedno zobecněné řešení — $c_j \in AC\,[0, T_n^*)$ — systému (3.4) $\forall n \in \mathbf{N}$. Je-li časový interval $[0, T_n^*)$, na kterém toto řešení existuje, takový, že $T_n^* < T$, pak nutně $\max |c_j(t)| \xrightarrow[t \to (T_n^*)^-]{} +\infty$. Ukážeme, že toto nenastane, a tudíž řešení bude existovat na celém intervalu $(0, T)$. Navíc, jak uvidíme dále, řešení lze dodefinovat i do času $t = T$. Násobme $(3.4)_j$ $c_j(t)$ a sečtěme přes $j = 1,..,n$. Integrujme přes $(0,t)$ (formálně je to totéž jako vzít za testovací funkci v (3.3) $\mathbf{u}^n$). Máme

$$\int_0^t \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} |c_j|^2 \, \mathrm{d}\tau + \int_0^t \sum_{j,k,l=1}^n c_k c_l c_j \int_\Omega \left(\mathbf{w}^k \cdot \nabla \mathbf{w}^l\right) \cdot \mathbf{w}^j \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}\tau$$
$$+ \nu \int_0^t \sum_{j=1}^n |c_j|^2 \lambda_j \, \mathrm{d}\tau = \int_0^t \left\langle \mathbf{f}, c_j \mathbf{w}^j \right\rangle \mathrm{d}\tau$$

nebo ekvivalentně

$$\int_0^t \frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \|\mathbf{u}^n(t)\|_2^2 \, \mathrm{d}\tau + \underbrace{\int_0^t \int_\Omega (\mathbf{u}^n \cdot \nabla \mathbf{u}^n) \cdot \mathbf{u}^n \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}\tau}_{=0}$$
$$+ \nu \int_0^t \int_\Omega |\nabla \mathbf{u}^n|^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}\tau = \int_0^t \langle \mathbf{f}, \mathbf{u}^n \rangle \, \mathrm{d}\tau,$$

a tedy

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \|\mathbf{u}^n(t)\|_2^2 + \nu \int_0^t \|\nabla \mathbf{u}^n\|_2^2 \, \mathrm{d}\tau \\ &\le \|\mathbf{f}\|_{L^2(0,t;(W^{1,2}_{0,\mathrm{div}}(\Omega))^*)} \|\mathbf{u}^n\|_{L^2(0,t;W^{1,2}_{0,\mathrm{div}}(\Omega))} + \frac{1}{2} \|\mathbf{u}^n(0)\|_2^2 . \end{aligned}$$

První člen na pravé straně můžeme pomocí Friedrichsovy a Youngovy nerovnosti odhadnout

$$C(\nu) \|\mathbf{f}\|^2_{L^2(0,t;(W^{1,2}_{0,\mathrm{div}}(\Omega))^*)} + \frac{1}{2} \nu \|\nabla \mathbf{u}^n\|^2_{L^2(0,t;L^2(\Omega))},$$

což vede na

$$\|\mathbf{u}^n(t)\|_2^2 + \nu \int_0^t \|\nabla \mathbf{u}^n\|_2^2 \, \mathrm{d}\tau \le C(\mathbf{f}, \mathbf{u}_0), \tag{3.5}$$

[2]Používáme sumační konvenci, sčítáme tedy přes dva opakované indexy; např. $u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^N u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$ nebo $c_k^n(t) \mathbf{w}^k(x) = \sum_{k=1}^n c_k^n(t) \mathbf{w}^k(x)$.

neboť $\|\mathbf{u}^n(0)\|_2^2 = \sum\limits_{j=1}^{n} a_j^2 \le \|\mathbf{u}_0\|_2^2$. Odtud plyne, že $c_j(\cdot)$ jsou omezené funkce v čase, a proto $T_n^* = T \ \forall n \in \mathbf{N}$. Máme tedy

$$\boxed{\sup_{t\in[0,T)} \|\mathbf{u}^n(t)\|_2^2 + \nu \int_0^T \|\nabla \mathbf{u}^n\|_2^2 \,\mathrm{d}\tau \le C\left(\mathbf{f}, \mathbf{u}_0\right). \qquad (3.6)}$$

(Posloupnost $\mathbf{u}^n$ je proto omezená v prostorech $L^\infty(0,T;(L^2(\Omega))^N)$ a $L^2(0,T;(W^{1,2}(\Omega))^N)$.) Řešení můžeme dokonce prodloužit až do času T.

Ad c) Odhad (3.6) nám na limitní přechod nestačí, neboť řešíme nelineární evoluční úlohu. Máme k dispozici Aubin–Lionsovo lemma, ale k němu potřebujeme odhad časové derivace. Ten nám vyjde různě pro různé dimenze, a proto nejprve počítejme lehčí dvoudimenzionální situaci, pro $N = 3$ jen ukážeme, kde je změna. Nechť $\boldsymbol{\varphi} \in L^2(0,T;W^{1,2}_{0,\mathrm{div}}(\Omega))$. Potom je možno psát $\boldsymbol{\varphi}(t,x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(t)\mathbf{w}^k(x)$, $a_k(t) = \int_\Omega \boldsymbol{\varphi}(t,x)\mathbf{w}^k(x)\,\mathrm{d}x$. Označme $\boldsymbol{\varphi}^n(t,x) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k(t)\mathbf{w}^k(x)$. Zřejmě (proveďte podrobně!)

$$\|\boldsymbol{\varphi}^n\|_{L^2(0,T;W^{1,2}_{0,\mathrm{div}}(\Omega))} \le \|\boldsymbol{\varphi}\|_{L^2(0,T;W^{1,2}_{0,\mathrm{div}}(\Omega))}.$$

Tedy

$$\begin{aligned}
&\left\|\frac{\partial \mathbf{u}^n}{\partial t}\right\|_{L^2(0,T;(W^{1,2}_{0,\mathrm{div}}(\Omega))^*)} = \sup_{\substack{\boldsymbol{\varphi}\in L^2(0,T;W^{1,2}_{0,\mathrm{div}}(\Omega))\\ \|\boldsymbol{\varphi}\|\le 1}} \left| \int_0^T \int_\Omega \frac{\partial \mathbf{u}^n}{\partial t}\cdot \boldsymbol{\varphi}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right| \\
&= \sup_{\substack{\boldsymbol{\varphi}\in L^2(0,T;W^{1,2}_{0,\mathrm{div}}(\Omega))\\ \|\boldsymbol{\varphi}\|\le 1}} \left| \int_0^T \int_\Omega \frac{\partial \mathbf{u}^n}{\partial t}\cdot \boldsymbol{\varphi}^n\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right| \underbrace{=}_{\text{můžeme použít Definici 3.1.3}} \\
&= \sup_{\substack{\boldsymbol{\varphi}\in L^2(0,T;W^{1,2}_{0,\mathrm{div}}(\Omega))\\ \|\boldsymbol{\varphi}\|\le 1}} \left| \int_0^T \langle \mathbf{f}, \boldsymbol{\varphi}^n\rangle \,\mathrm{d}t - \int_0^T \int_\Omega (\mathbf{u}^n\cdot\nabla\mathbf{u}^n)\cdot\boldsymbol{\varphi}^n\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \right. \\
&\left. -\nu \int_0^T\int_\Omega \nabla\mathbf{u}^n : \nabla\boldsymbol{\varphi}^n\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right| \\
&\le \sup_{\substack{\boldsymbol{\varphi}\in L^2(0,T;W^{1,2}_{0,\mathrm{div}}(\Omega))\\ \|\boldsymbol{\varphi}\|\le 1}} \Big[\big(\|\mathbf{f}\|_{L^2(0,T;(W^{1,2}_{0,\mathrm{div}}(\Omega))^*)} \\
&+\nu \|\nabla \mathbf{u}^n\|_{L^2(0,T;(L^2(\Omega))^N)} \big) \|\boldsymbol{\varphi}^n\|_{L^2(0,T;W^{1,2}_{0,\mathrm{div}}(\Omega))} + \text{K.Č.} \Big].
\end{aligned}$$

Odhadujme konvektivní člen (K.Č.)

$$\begin{aligned}
&\left| -\int_0^T \int_\Omega (\mathbf{u}^n\cdot\nabla\mathbf{u}^n)\cdot\boldsymbol{\varphi}^n\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right| = \left|\int_0^T\int_\Omega \mathbf{u}^n\cdot(\mathbf{u}^n\cdot\nabla\boldsymbol{\varphi}^n)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right| \\
&\le \int_0^T \|\nabla\boldsymbol{\varphi}^n\|_2 \|\mathbf{u}^n\|_4^2 \,\mathrm{d}t \le C\int_0^T \|\nabla\boldsymbol{\varphi}^n\|_2 \|\nabla\mathbf{u}^n\|_2 \|\mathbf{u}^n\|_2 \,\mathrm{d}t \\
&\le C\|\mathbf{u}^n\|_{L^\infty(0,T;(L^2(\Omega))^2)} \|\nabla\mathbf{u}^n\|_{L^2(0,T;(L^2(\Omega))^4)} \|\nabla\boldsymbol{\varphi}^n\|_{L^2(0,T;(L^2(\Omega))^4)}.
\end{aligned}$$

Celkem tedy máme

$$\begin{aligned}
&\sup_{\substack{\boldsymbol{\varphi}\in L^2(0,T;W^{1,2}_{0,\mathrm{div}}(\Omega))\\ \|\boldsymbol{\varphi}\|\le 1}} \Big| \int_0^T \int_\Omega \frac{\partial \mathbf{u}^n}{\partial t}\cdot \boldsymbol{\varphi}^n \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \Big| \\
&\le \sup_{\substack{\boldsymbol{\varphi}\in L^2(0,T;W^{1,2}_{0,\mathrm{div}}(\Omega))\\ \|\boldsymbol{\varphi}\|\le 1}} C\big(\|\mathbf{f}\|_{L^2(0,T;(W^{1,2}_{0,\mathrm{div}}(\Omega))^*)} + \nu \|\nabla \mathbf{u}^n\|_{L^2(0,T;(L^2(\Omega))^4)} \\
&+ \|\nabla \mathbf{u}^n\|_{L^2(0,T;(L^2(\Omega))^4)} \|\mathbf{u}^n\|_{L^\infty(0,T;(L^2(\Omega))^2)} \big) \|\boldsymbol{\varphi}^n\|_{L^2(0,T;W^{1,2}_{0,\mathrm{div}}(\Omega))} \\
&\le C(\mathbf{f},\mathbf{u}_0),
\end{aligned}$$

a proto

$$N=2 \qquad \left\| \frac{\partial \mathbf{u}^n}{\partial t} \right\|_{L^2(0,T;(W^{1,2}_{0,\mathrm{div}}(\Omega))^*)} \le C\left(\mathbf{f},\mathbf{u}_0\right). \tag{3.7}$$

Ve třech dimenzích je jediná změna v konvektivním členu.

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \int_\Omega |\mathbf{u}^n|^2 |\nabla \boldsymbol{\varphi}^n| \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \le \int_0^T \|\nabla \boldsymbol{\varphi}^n\|_2 \|\mathbf{u}^n\|_4^2 \,\mathrm{d}t \\
&\le C \int_0^T \|\nabla \boldsymbol{\varphi}^n\|_2 \|\mathbf{u}^n\|_2^{\frac12} \|\nabla \mathbf{u}^n\|_2^{\frac32} \,\mathrm{d}t \\
&\le C \|\mathbf{u}^n\|^{\frac12}_{L^\infty(0,T;(L^2(\Omega))^3)} \|\nabla \mathbf{u}^n\|^{\frac32}_{L^2(0,T;(L^2(\Omega))^9)} \|\nabla \boldsymbol{\varphi}^n\|_{L^4(0,T;(L^2(\Omega))^9)} .
\end{aligned}$$

Tedy u výše uvedeného odhadu máme

$$\sup_{\substack{\boldsymbol{\varphi}\in L^4(0,T;W^{1,2}_{0,\mathrm{div}}(\Omega))\\ \|\boldsymbol{\varphi}\|\le 1}} \Big| \int_0^T \int_\Omega \frac{\partial \mathbf{u}^n}{\partial t}\cdot \boldsymbol{\varphi} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \Big| \le C\left(\mathbf{f},\mathbf{u}_0\right),$$

$$N=3 \qquad \left\| \frac{\partial \mathbf{u}^n}{\partial t} \right\|_{L^{\frac43}(0,T;(W^{1,2}_{0,\mathrm{div}}(\Omega))^*)} \le C\left(\mathbf{f},\mathbf{u}_0\right). \tag{3.8}$$

Jak uvidíme později, horší integrovatelnost časové derivace přes časovou proměnnou, která úzce souvisí s horší integrovatelností konvektivního členu, bude mít dalekosáhlé důsledky.

Ad d) Nyní už máme vše připravené pro limitní přechod. Díky apriorním odhadům víme, že existuje $\mathbf{u} \in L^2(0,T;W^{1,2}_{0,\mathrm{div}}(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;(L^2(\Omega))^N)$ s $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \in L^q(0,T;(W^{1,2}_{0,\mathrm{div}}(\Omega))^*)$ $\big(q=2$ pro $N=2$, $q=\frac43$ pro $N=3\big)$ takové, že pro vhodnou podposloupnost n_k:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}^{n_k} &\overset{*}{\rightharpoonup} \mathbf{u} \quad \text{v} \quad L^\infty(0,T;(L^2(\Omega))^N),\\
\mathbf{u}^{n_k} &\rightharpoonup \mathbf{u} \quad \text{v} \quad L^2(0,T;W^{1,2}_{0,\mathrm{div}}(\Omega)),\\
\frac{\partial \mathbf{u}^{n_k}}{\partial t} &\rightharpoonup \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \quad \text{v} \quad L^q(0,T;(W^{1,2}_{0,\mathrm{div}}(\Omega))^*).
\end{aligned}$$

Vezmeme-li v Aubin–Lionsově lemmatu za prostory $X_0 = W^{1,2}_{0,\mathrm{div}}(\Omega)$, $X = L^2_{0,\mathrm{div}}(\Omega)$ a $X_1 = (W^{1,2}_{0,\mathrm{div}}(\Omega))^*$, pak pro Ω omezenou zřejmě

$$X_0 \hookrightarrow\hookrightarrow X \hookrightarrow X_1,$$

a tedy (obecně pro další podposloupnost)

$$\mathbf{u}^{n_k} \longrightarrow \mathbf{u} \quad \text{v} \quad L^2(0,T;(L^2(\Omega))^N).$$

Navíc díky omezenosti $\mathbf{u}^{n_k}$ v $L^\infty(0,T;(L^2(\Omega))^N)$ a v $L^2(0,T;W^{1,2}_{0,\mathrm{div}}(\Omega))$ máme, že

$$\mathbf{u}^{n_k} \longrightarrow \mathbf{u} \quad \text{v} \quad L^q(0,T;(L^2(\Omega))^N) \quad \forall q < \infty$$

$$\mathbf{u}^{n_k} \longrightarrow \mathbf{u} \quad \text{v} \quad L^2(0,T;(L^p(\Omega))^N),$$
$$\forall p < \infty \text{ pro } N = 2, \quad \forall p < 6 \text{ pro } N = 3.$$

Vezměme tedy rovnost (3.3) pro pevnou funkci $\mathbf{w}^j$. Násobme ji $\psi \in C_0^\infty(0,T)$ a integrujme přes $(0,T)$. Máme (místo n_k pišme opět n)

$$\int_0^T \Big\langle \frac{\partial \mathbf{u}^n}{\partial t}, \mathbf{w}^j \Big\rangle \psi \,\mathrm{d}t + \int_0^T \int_\Omega (\mathbf{u}^n \cdot \nabla \mathbf{u}^n) \cdot \mathbf{w}^j \,\mathrm{d}x \,\psi \,\mathrm{d}t$$
$$+\nu \int_0^T \int_\Omega \nabla \mathbf{u}^n : \nabla \mathbf{w}^j \,\mathrm{d}x \,\psi \,\mathrm{d}t = \int_0^T \big\langle \mathbf{f}, \mathbf{w}^j \big\rangle \,\psi \,\mathrm{d}t,$$

přičemž

$$\Big\langle \frac{\partial \mathbf{u}^n}{\partial t}, \mathbf{w}^j \Big\rangle = \Big\langle \frac{\partial \mathbf{u}^n}{\partial t}, \mathbf{w}^j \Big\rangle_{(W^{1,2}_{0,\mathrm{div}}(\Omega))^*, W^{1,2}_{0,\mathrm{div}}(\Omega)} = \int_\Omega \frac{\partial \mathbf{u}^n}{\partial t} \cdot \mathbf{w}^j \,\mathrm{d}x \quad \forall n \in \mathbf{N}.$$

Nyní proveďme limitní přechod $n \to \infty$. V lineárních členech není problém, tam vystačíme se slabou konvergencí. Proto se podívejme na konvektivní člen. Díky silné konvergenci máme (odhady provádíme pro $N = 3$, pro $N = 2$ je situace jednodušší)

$$\Big| \int_0^T \int_\Omega \big[(\mathbf{u}^n \cdot \nabla \mathbf{u}^n) \cdot \mathbf{w}^j - (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{w}^j \big] \,\mathrm{d}x \,\psi \,\mathrm{d}t \Big|$$
$$= \Big| \int_0^T \int_\Omega \big[(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{w}^j) \cdot \mathbf{u} - \big(\mathbf{u}^n \cdot \nabla \mathbf{w}^j \big) \cdot \mathbf{u}^n \big] \,\mathrm{d}x \,\psi \,\mathrm{d}t \Big|$$
$$\leq \Big| \int_0^T \int_\Omega (u_i - u_i^n) \frac{\partial w_k^j}{\partial x_i} u_k \psi \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t \Big|$$
$$+ \Big| \int_0^T \int_\Omega u_i^n \frac{\partial w_k^j}{\partial x_i} (u_k - u_k^n) \,\psi \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t \Big|$$
$$\leq \int_0^T \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^n\|_3 \,\|\mathbf{u}\|_6 \,\big\|\nabla \mathbf{w}^j\big\|_2 \,|\psi| \,\mathrm{d}t$$
$$+ \int_0^T \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^n\|_3 \,\|\mathbf{u}^n\|_6 \,\big\|\nabla \mathbf{w}^j\big\|_2 \,|\psi| \,\mathrm{d}t$$
$$\leq \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^n\|_{L^2(0,T;(L^3(\Omega))^3)} \,\big\|\nabla \mathbf{w}^j\big\|_{(L^2(\Omega))^9} \,\|\psi\|_{L^\infty(0,T)} \,\times$$
$$\times \big(\|\mathbf{u}\|_{L^2(0,T;(L^6(\Omega))^3)} + \|\mathbf{u}^n\|_{L^2(0,T;(L^6(\Omega))^3)} \big) \longrightarrow 0.$$

Limitní funkce $\mathbf{u}$ tedy splňuje

$$\int_0^T \Big\langle \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \mathbf{w}^j \Big\rangle \psi \,\mathrm{d}t + \int_0^T \int_\Omega (\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u})\cdot\mathbf{w}^j \,\mathrm{d}x\psi \,\mathrm{d}t$$
$$+\nu \int_0^T \int_\Omega \left(\nabla\mathbf{u} : \nabla\mathbf{w}^j\right) \mathrm{d}x\psi \,\mathrm{d}t = \int_0^T \left\langle \mathbf{f}, \mathbf{w}^j \right\rangle \psi \,\mathrm{d}t \tag{3.9}$$
$$\forall j \in \mathbf{N},\ \forall \psi \in C_0^\infty(0,T).$$

Nyní nechť $\boldsymbol{\varphi} \in W^{1,2}_{0,\mathrm{div}}(\Omega)$, tedy $\boldsymbol{\varphi} \in \overline{Lin\,\{\mathbf{w}^j\}_{j=1}^\infty}$, a tudíž (formálně limita $\mathbf{w}^n$, $n \to \infty$) je rovnost (3.9) splněna pro všechny testovací funkce z $W^{1,2}_{0,\mathrm{div}}(\Omega)$. Nyní si stačí uvědomit, že díky splnění rovnosti pro všechny $\psi \in C_0^\infty(0,T)$ platí ve skutečnosti

$$\Big\langle \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \boldsymbol{\varphi} \Big\rangle + \int_\Omega (\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u})\cdot\boldsymbol{\varphi}\,\mathrm{d}x + \nu\int_\Omega \nabla\mathbf{u} : \nabla\boldsymbol{\varphi}\,\mathrm{d}x = \langle \mathbf{f}, \boldsymbol{\varphi}\rangle$$
$$\forall \boldsymbol{\varphi} \in W^{1,2}_{0,\mathrm{div}}(\Omega) \quad \text{pro s.v. } t \in (0,T).$$

Ad e) Vezměme rovnost

$$\frac{1}{2}\left\|\mathbf{u}^n(t)\right\|_2^2 + \nu\int_0^t\int_\Omega \left|\nabla\mathbf{u}^n\right|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau - \int_0^t \langle \mathbf{f}, \mathbf{u}^n\rangle \,\mathrm{d}\tau - \frac{1}{2}\left\|\mathbf{u}^n(0)\right\|_2^2 = 0,$$

násobme ji $\psi \in C_0^\infty(0,T)$, $\psi \geq 0$ na $[0,T]$ a integrujme přes $[0,T]$. Máme

$$\int_0^T \Big[\frac{1}{2}\left\|\mathbf{u}^n(t)\right\|_2^2\psi + \nu\int_0^t\int_\Omega \left|\nabla\mathbf{u}^n\right|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau\psi$$
$$- \int_0^t \langle \mathbf{f}, \mathbf{u}^n\rangle \,\mathrm{d}\tau\psi - \frac{1}{2}\left\|\mathbf{u}^n(0)\right\|_2^2\psi\Big] \,\mathrm{d}t = 0$$

a pošleme $n \to \infty$. První člen jde díky silné konvergenci $\mathbf{u}^n \to \mathbf{u}$ v $L^2(0,T;(L^2(\Omega))^N)$ k $\int_0^T \frac{1}{2}\left\|\mathbf{u}\right\|_2^2\psi\,\mathrm{d}t$. Ve druhém použijeme slabou zdola polospojitost normy a Fatouovo lemma. Protože

$$\liminf_{n\to\infty}\int_0^t\int_\Omega |\nabla\mathbf{u}^n|^2 \,\mathrm{d}x\ \mathrm{d}\tau \geq \int_0^t\int_\Omega |\nabla\mathbf{u}|^2 \,\mathrm{d}x\ \mathrm{d}\tau$$

a $\psi \geq 0$, máme

$$\liminf_{n\to\infty}\int_0^T\int_0^t\int_\Omega \left|\nabla\mathbf{u}^n\right|^2 \,\mathrm{d}x\ \mathrm{d}\tau\psi\,\mathrm{d}t$$
$$\geq \int_0^T \liminf_{n\to\infty}\Big(\int_0^t\int_\Omega \left|\nabla\mathbf{u}^n\right|^2 \,\mathrm{d}x\ \mathrm{d}\tau\Big)\psi\,\mathrm{d}t \geq \int_0^T\int_0^t\int_\Omega \left|\nabla\mathbf{u}\right|^2 \,\mathrm{d}x\ \mathrm{d}\tau\psi\,\mathrm{d}t.$$

Třetí člen je jednoduchý — stačí slabá konvergence a poslední člen jde k $\int_0^T -\frac{1}{2}\left\|\mathbf{u}(0)\right\|_2^2\psi\,\mathrm{d}t$, díky úplnosti systému $\left\{\mathbf{w}^i\right\}_{i=1}^\infty$ v $L^2_{0,\mathrm{div}}(\Omega)$. Celkem máme

$$\int_0^T \Big[\frac{1}{2}\left\|\mathbf{u}(t)\right\|_2^2 + \nu\int_0^t\int_\Omega |\nabla\mathbf{u}|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau - \int_0^t \langle \mathbf{f}, \mathbf{u}\rangle \,\mathrm{d}\tau$$
$$-\frac{1}{2}\left\|\mathbf{u}_0\right\|_2^2\Big]\psi(t)\,\mathrm{d}t \leq 0 \quad \forall\psi \in C_0^\infty(0,T); \quad \psi \geq 0 \text{ na } [0,T]\,.$$

Vhodnou volbou $\psi = \omega_\varepsilon$ — regularizační jádro — díky limitě $\varepsilon \to 0^+$ dostáváme, že

$$\frac{1}{2}\|\mathbf{u}(t)\|_2^2 + \nu \int_0^t \int_\Omega |\nabla \mathbf{u}|^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}\tau \le \frac{1}{2}\|\mathbf{u}_0\|_2^2 + \int_0^t \langle \mathbf{f}, \mathbf{u} \rangle \, \mathrm{d}\tau$$

pro s.v. $t \in (0,T)$, což je hledaná energetická nerovnost.

Ad f) Vyšetřeme nyní v jakém smyslu se nabývá počáteční podmínka. Postupujeme jako v limitním přechodě, pouze v členu s časovou derivací s $\psi \in C^\infty[0,T]$, $\psi(T) = 0$ integrujeme per partes přes čas. Máme

$$\begin{aligned}
&-\int_0^T \int_\Omega \mathbf{u}^n \cdot \mathbf{w}^j \frac{\partial \psi}{\partial t} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t - \int_\Omega \mathbf{u}^n(0) \cdot \mathbf{w}^j \psi(0) \, \mathrm{d}x \\
&+ \int_0^T \int_\Omega (\mathbf{u}^n \cdot \nabla \mathbf{u}^n) \cdot \mathbf{w}^j \psi \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \\
&+ \nu \int_0^T \int_\Omega \nabla \mathbf{u}^n : \nabla \mathbf{w}^j \psi \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t = \int_0^T \left\langle \mathbf{f}, \mathbf{w}^j \right\rangle \psi \, \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

a limitním přechodem $n \to \infty$ s využitím úplnosti systému $\{\mathbf{w}^j\}_{j=1}^\infty$ máme (ve skutečnosti jde o dva limitní přechody, stejně jako v části d))

$$\begin{aligned}
&-\int_0^T \int_\Omega \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\varphi} \frac{\partial \psi}{\partial t} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t - \int_\Omega \mathbf{u}_0 \cdot \boldsymbol{\varphi} \psi(0) \, \mathrm{d}x + \int_0^T \int_\Omega (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\varphi} \psi \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \\
&+ \nu \int_0^T \int_\Omega \nabla \mathbf{u} : \nabla \boldsymbol{\varphi} \psi \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t = \int_0^T \langle \mathbf{f}, \boldsymbol{\varphi} \rangle \psi \, \mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Nyní si uvědomme, že

$$\begin{aligned}
\int_0^T \left\langle \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \boldsymbol{\varphi} \right\rangle \psi \, \mathrm{d}t &= \int_0^T \underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \langle \mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi} \rangle}_{= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_\Omega \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\varphi} \, \mathrm{d}x} \psi \, \mathrm{d}t \\
&= -\int_0^T \left(\int_\Omega \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\varphi} \, \mathrm{d}x \right) \frac{\partial \psi}{\partial t} \, \mathrm{d}t - \underbrace{\int_\Omega \mathbf{u}(0) \cdot \boldsymbol{\varphi} \, \mathrm{d}x \psi(0)}_{\mathbf{u} \in C([0,T];(L^2_w(\Omega))^N)}.
\end{aligned}$$

Volbou $\psi(0) \neq 0$ máme

$$\int_\Omega \mathbf{u}(0) \cdot \boldsymbol{\varphi} \, \mathrm{d}x = \int_\Omega \mathbf{u}_0 \cdot \boldsymbol{\varphi} \, \mathrm{d}x,$$

tedy

$$\mathbf{u}(t) \rightharpoonup \mathbf{u}_0 \text{ v } (L^2(\Omega))^N \text{ pro } t \longrightarrow 0^+.$$

Speciálně

$$\liminf_{t \to 0^+} \|\mathbf{u}(t)\|_2^2 \ge \|\mathbf{u}_0\|_2^2 .$$

Na druhou stranu ale z energetické nerovnosti plyne

$$\limsup_{t \to 0^+} \|\mathbf{u}(t)\|_2^2 \le \|\mathbf{u}_0\|_2^2 \Longrightarrow \lim_{t \to 0^+} \|\mathbf{u}(t)\|_2^2 = \|\mathbf{u}_0\|_2^2 .$$

Tedy díky hilbertovské struktuře $L^2(\Omega)$ je $\lim\limits_{t\to 0^+} \|\mathbf{u}(t)-\mathbf{u}_0\|_2^2 = 0$. Dodejme, že pro $N=2$ máme díky Lemmatu 2.2.4 $\mathbf{u}\in C([0,T];L^2_{0,\mathrm{div}}(\Omega))$, a silná konvergence k počáteční podmínce plyne přímo.

Ad g) Nechť $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2$ jsou dvě různá řešení Navier–Stokesových rovnic ve dvou dimenzích, příslušná počáteční podmínce $\mathbf{u}_0$ a pravé straně $\mathbf{f}$. Potom

$$\Big\langle \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial t},\boldsymbol{\varphi}\Big\rangle + \nu\int_\Omega \nabla\mathbf{u}_i : \nabla\boldsymbol{\varphi}\,\mathrm{d}x + \int_\Omega (\mathbf{u}_i\cdot\nabla\mathbf{u}_i)\cdot\boldsymbol{\varphi}\,\mathrm{d}x = \langle \mathbf{f},\boldsymbol{\varphi}\rangle$$
$$i=1,2.$$

Odečtením máme

$$\Big\langle \frac{\partial(\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2)}{\partial t},\boldsymbol{\varphi}\Big\rangle + \nu\int_\Omega \nabla(\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2) : \nabla\boldsymbol{\varphi}\,\mathrm{d}x$$
$$+\int_\Omega (\mathbf{u}_1\cdot\nabla\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2\cdot\nabla\mathbf{u}_2)\cdot\boldsymbol{\varphi}\,\mathrm{d}x = 0.$$

Nyní si připomeňme, že rozdíl řešení $\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2 \in L^2(0,T;(W^{1,2}_{0,\mathrm{div}}(\Omega))^N)\cap L^\infty(0,T;(L^2(\Omega))^N)$. Analogicky jako v důkazu výše je možno ukázat, že též $\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2)\in L^2(0,T;(W^{1,2}_{0,\mathrm{div}}(\Omega))^*)$, a tudíž

$$\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2\in C([0,T];L^2_{0,\mathrm{div}}(\Omega)) \quad \text{a}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\|\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2\|_2^2 = 2\Big\langle \frac{\partial(\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2)}{\partial t},\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2\Big\rangle,$$

viz Lemma 2.2.4. Funkce $\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2$ je dobrou testovací funkcí, po dosazení máme

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\|\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2\|_2^2 + \nu\int_\Omega |\nabla(\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2)|^2\,\mathrm{d}x$$
$$=\int_\Omega (\mathbf{u}_2\cdot\nabla\mathbf{u}_2-\mathbf{u}_1\cdot\nabla\mathbf{u}_1)\cdot(\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2)\,\mathrm{d}x.$$

Přepišme pravou stranu

$$(\mathrm{P.S.}) = \underbrace{\int_\Omega -\big(\mathbf{u}_2\cdot\nabla(\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2)\big)\cdot(\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2)\,\mathrm{d}x}_{=0}$$
$$+\int_\Omega (\mathbf{u}_2-\mathbf{u}_1)\cdot\nabla\mathbf{u}_1\cdot(\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2)\,\mathrm{d}x$$
$$\le \|\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2\|_4^2\,\|\nabla\mathbf{u}_1\|_2 \le C\,\|\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2\|_2\,\|\nabla(\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2)\|_2\,\|\nabla\mathbf{u}_1\|_2\,.$$

Máme tedy

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\|\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2\|_2^2 + \nu\int_\Omega |\nabla(\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2)|^2\,\mathrm{d}x \le \frac{\nu}{2}\|\nabla(\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2)\|_2^2$$
$$+C(\nu)\,\|\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2\|_2^2\,\|\nabla\mathbf{u}_1\|_2^2\,,$$

což dává

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\|\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2\|_2^2 + \nu\int_\Omega |\nabla(\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2)|^2\,\mathrm{d}x \le C(\nu)\,\|\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2\|_2^2\,\|\nabla\mathbf{u}_1\|_2^2\,.$$

Protože $\|\nabla \mathbf{u}_1\|_2^2 \in L^1(0,T)$ a $(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)(0) = \mathbf{0}$, plyne z Gronwallovy nerovnosti

$$\|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_2^2(t) = 0 \text{ s.v. na } (0,T), \quad \text{tj. } \mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2 \text{ s.v. na } (0,T) \times \Omega.$$

Protože můžeme díky stejnému argumentu jako v důkazu jednoznačnosti použít pro $N = 2$ jako testovací funkci samotné řešení, analogickým postupem jako výše dokážeme energetickou rovnost (3.1). Navíc, pokud použijeme spojitého reprezentanta (připomeňme, že díky Lemmatu 2.2.4 je $\mathbf{u} \in C([0,T];(L^2(\Omega))^N)$), platí energetická rovnost pro všechny časy $t \in [0,T]$.

■

3.2 Rekonstrukce tlaku

Cílem je zjistit, zda slabá formulace nezničila informaci o tlaku, tj. zda $\exists p \in \mathcal{D}'((0,T) \times \Omega)$ (či spíše hladší) tak, že

$$\left\langle \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \boldsymbol{\varphi} \right\rangle + \int_\Omega (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\varphi} \, \mathrm{d}x + \nu \int_\Omega \nabla \mathbf{u} : \nabla \boldsymbol{\varphi} \, \mathrm{d}x + \langle \nabla p, \boldsymbol{\varphi} \rangle = \langle \mathbf{f}, \boldsymbol{\varphi} \rangle$$
$$\forall \boldsymbol{\varphi} \in (C_0^\infty(\Omega))^N \text{ a s.v. } t \in (0,T). \tag{3.10}$$

Obecně, pokud pouze $\mathbf{f} \in L^2(0,T;(W^{1,2}_{0,\mathrm{div}})^*)$, to není zřejmé a tlak nemusí existovat, viz např. článek [28].

Můžeme se pokusit použít pro $\mathbf{f} \in L^2(0,T;(W^{-1,2}(\Omega))^N)$ dříve dokázané Lemma o existenci tlaku 2.3.4. Tedy uvažujme funkcionál

$$\left\langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\varphi} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \mathbf{f}, \boldsymbol{\varphi} \right\rangle + \int_\Omega (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\varphi} \, \mathrm{d}x + \nu \int_\Omega \nabla \mathbf{u} : \nabla \boldsymbol{\varphi} \, \mathrm{d}x.$$

Ale obecně není zřejmé, že $\mathbf{F}$ je distribuce! Důvodem je, že časová derivace $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \in L^q(0,T;(W^{1,2}_{0,\mathrm{div}}(\Omega))^*)$, ale nemáme žádnou informaci o tom, zda patří do $L^q(0,T;((W_0^{1,2}(\Omega))^*)^N)$.

Poznámka. Při jiných okrajových podmínkách, např. pouze $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ (spolu s např. podmínkou smyku na hranici) bychom měli

$$\boldsymbol{\varphi} \in (W_0^{1,2}(\Omega))^N \Longrightarrow \boldsymbol{\varphi} = \underbrace{\boldsymbol{\varphi}_1}_{\in (W^{1,2}(\Omega))^N,\, \mathrm{div}\, \boldsymbol{\varphi}_1 = 0,\, \boldsymbol{\varphi}_1 \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ na } \partial\Omega} + \nabla \pi,$$
$$\left\langle \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \nabla \pi \right\rangle = 0,$$

a teď je nutno ověřit, že $\boldsymbol{\varphi}_1$ je dobrá testovací funkce; při podmínkách $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ je to v pořádku a vše projde. Proto $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$ je distribuce a můžeme použít Lemma o existenci tlaku 2.3.4. Pro Cauchyův problém nebo periodické okrajové podmínky můžeme postupovat jinak. Použijeme-li na bilanci hybnosti operátor divergence (ve smyslu distribucí), získáme následující rovnici

$$\Delta p = \mathrm{div}\, \mathbf{f} - \mathrm{div}\, \mathrm{div}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}).$$

Ve výše zmíněných případech je tento problém v odpovídajících prostorech jednoznačně řešitelný. Na druhou stranu pro např. Dirichletovy podmínky na rychlost nám chybí okrajová podmínka pro výše uvedenou rovnici a postup tedy selže. Vidíme, že problém existence tlaku se v důsledku homogenních Dirichletových podmínek komplikuje.

Platí nicméně

Věta 3.2.1. *Nechť $\boldsymbol{u}$ je slabé řešení Navier–Stokesových rovnic zkonstruované Galerkinovou metodou, $\Omega \in C^{0,1}$, $N = 2, 3$.*

Potom existuje $P\colon (0,T)\times\Omega \to \mathbf{R}$ tak, že $P(t) \in L^2(\Omega)$ $\forall t \in (0,T)$ a splňuje

$$\int_0^t \Big(-\nu \int_\Omega \nabla \boldsymbol{u} : \nabla \boldsymbol{\chi} \,\mathrm{d}x - \int_\Omega (\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{\chi}\,\mathrm{d}x + \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{\chi}\rangle \Big)\,\mathrm{d}\tau$$
$$= \int_\Omega P(t)\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{\chi}\,\mathrm{d}x + \int_\Omega \boldsymbol{u}(t)\cdot\boldsymbol{\chi}\,\mathrm{d}x - \int_\Omega \boldsymbol{u}_0\cdot\boldsymbol{\chi}\,\mathrm{d}x \quad \forall \boldsymbol{\chi} \in (W_0^{1,2}(\Omega))^N.$$

Důkaz. Vezměme vztah pro Galerkinovu aproximaci, integrujme přes čas, časovou derivaci integrujme per partes:

$$\int_0^t \int_\Omega \frac{\partial \mathbf{u}^m}{\partial t}\cdot \mathbf{w}^i \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau = \int_\Omega \mathbf{u}^m(t)\cdot\mathbf{w}^i\,\mathrm{d}x - \int_\Omega \mathbf{u}^m(0)\cdot\mathbf{w}^i\,\mathrm{d}x.$$

Máme tedy

$$\int_0^t \Big(-\nu \int_\Omega \nabla\mathbf{u}^m : \nabla\mathbf{w}^i\,\mathrm{d}x - \int_\Omega (\mathbf{u}^m\cdot\nabla\mathbf{u}^m)\cdot\mathbf{w}^i\,\mathrm{d}x + \big\langle \mathbf{f}, \mathbf{w}^i \big\rangle \Big)\,\mathrm{d}\tau$$
$$= \int_\Omega \mathbf{u}^m(t)\cdot\mathbf{w}^i\,\mathrm{d}x - \int_\Omega \mathbf{u}^m(0)\cdot\mathbf{w}^i\,\mathrm{d}x \quad \forall \mathbf{w}^i\ ,\ i = 1,..,m.$$

Limitním přechodem $m \to \infty$ $\Big($připomeňme, že $\mathbf{u}$ patří do prostoru $V = \big\{\mathbf{v} \in L^2(0,T;(W^{1,2}(\Omega)^N)) \cap L^\infty(0,T;(L^2(\Omega))^N);\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \in L^q(0,T;(W^{1,2}_{0,\mathrm{div}}(\Omega))^*)\big\} \hookrightarrow C([0,T];(L^2_{0,\mathrm{div}})_w)\Big)$ a dále „$\mathbf{w}^i \to \boldsymbol{\chi}$“ máme (využijeme hustotu konečných lineárních kombinací bázových funkcí ve $W^{1,2}_{0,\mathrm{div}}(\Omega)$)

$$F(\boldsymbol{\chi}) = \int_0^t \Big\{ -\nu \int_\Omega \nabla\mathbf{u} : \nabla\boldsymbol{\chi} - \int_\Omega (\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u})\cdot\boldsymbol{\chi} + \langle \mathbf{f}, \boldsymbol{\chi}\rangle \Big\}\,\mathrm{d}\tau$$
$$- \int_\Omega \mathbf{u}(t)\cdot\boldsymbol{\chi}\,\mathrm{d}x + \int_\Omega \mathbf{u}_0\cdot\boldsymbol{\chi}\,\mathrm{d}x = 0 \quad \forall\boldsymbol{\chi} \in W^{1,2}_{0,\mathrm{div}}(\Omega).$$

Navíc $F(\boldsymbol{\chi})$ má smysl pro $\forall\boldsymbol{\chi} \in (W_0^{1,2}(\Omega))^N$, $\forall t \in (0,T)$, tedy díky Lemmatu 2.3.4

$$\Rightarrow \quad \forall t \in (0,T)\ \exists P(t) \in L^2(\Omega):$$
$$F(\boldsymbol{\chi}) = \int_\Omega P(t)\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{\chi}\,\mathrm{d}x \quad \forall\boldsymbol{\chi} \in (W_0^{1,2}(\Omega))^N, \quad N = 2, 3.$$

■

Poznámka. Obecně není ale pravda, že $P(t) = \int_0^t p(\tau)\,\mathrm{d}\tau$, není zřejmé, že náš „tlak“ je skutečně primitivní funkcí k hledanému tlaku. Tedy získaný výsledek není příliš uspokojivý.

Pro případ, kdy je oblast Ω hladká, je možné předchozí výsledek zesílit:[3]

Věta 3.2.2. *Nechť* $\Omega \in C^2$, $\boldsymbol{u} \in L^q(0,T;(L^s(\Omega))^N)$, $\operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0$ *ve slabém smyslu,* $\boldsymbol{H}_i \in L^{q_i}(0,T;(L^{s_i}(\Omega))^{N^2})$, $i = 1,2$ *jsou takové, že*

$$-\int_0^T \int_\Omega \boldsymbol{u} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \int_0^T \int_\Omega (\boldsymbol{H}_1 + \boldsymbol{H}_2) : \nabla \boldsymbol{\varphi} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \tag{3.11}$$

pro všechna $\boldsymbol{\varphi} \in (C_0^\infty((0,T) \times \Omega))^N$ *s* $\operatorname{div} \boldsymbol{\varphi} = 0$. *Potom existují skalární funkce* $p_i \in L^{q_i}(0,T;L^{s_i}(\Omega))$, $i = 1,2$ *a skalární harmonická funkce* $p_h \in L^q(0,T;L^{s^*}(\Omega))$ *s* $\nabla p_h \in L^q(0,T;(L^s(\Omega))^N)$, $s^* = \frac{Ns}{N-s}$ *pro* $s < N$, $s^* \in [1,\infty)$ *pro* $s = N$ *a* $s^* \in [1,\infty]$ *pro* $s > N$ *taková, že*

$$\begin{aligned} -\int_0^T \int_\Omega \boldsymbol{u} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t &= \int_0^T \int_\Omega (\boldsymbol{H}_1 + \boldsymbol{H}_2) : \nabla \boldsymbol{\varphi} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\ + \int_0^T \int_\Omega (p_1 + p_2) \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t &+ \int_0^T \int_\Omega \nabla p_h \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{3.12}$$

pro všechna $\boldsymbol{\varphi} \in (C_0^\infty((0,T) \times \Omega))^N$. *Navíc*

$$\begin{aligned} \|p_i\|_{L^{q_i}(0,T;L^{s_i}(\Omega))} &\le C \|\boldsymbol{H}_i\|_{L^{q_i}(0,T;(L^{s_i}(\Omega))^{N^2})}, \quad i = 1,2, \\ \|\nabla p_h\|_{L^q(0,T;(L^s(\Omega))^N)} &\le C \|\boldsymbol{u}\|_{L^q(0,T;(L^s(\Omega))^N)}. \end{aligned}$$

Poznámka. Tuto větu lze použít tak, že za $\mathbf{H}_1$ vezmeme $\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}$ a za $\mathbf{H}_2$ funkci $-\nu \nabla u - \mathbf{F}$, $\mathbf{f} = \operatorname{div} \mathbf{F}$. Význam této věty spočívá v tom, že umožňuje uvažovat poměrně obecnou pravou stranu, na druhou stranu ale ukazuje, že tlak se obecně nechová tak, jak bychom mohli naivně očekávat.

Důkaz. Zvolme $t_0 \in (0,T)$ libovolné takové, že t_0 je Lebesgueův bod, tj.

$$\lim_{r \to 0^+} \frac{1}{2r} \int_{t_0 - r}^{t_0 + r} \mathbf{u}(\tau) \,\mathrm{d}\tau = \mathbf{u}(t_0)$$

v $(L^s(\Omega))^N$. Definujme pro $i = 1,2$

$$\widetilde{\mathbf{H}}_i(t) = \int_{t_0}^t \mathbf{H}_i(\tau) \,\mathrm{d}\tau.$$

Uvažujme následující Stokesovy problémy

$$\begin{aligned} -\Delta \mathbf{v}_i &= -\nabla \pi_i - \operatorname{div} \widetilde{\mathbf{H}}_i(t) \quad \text{v } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{v}_i &= 0 \quad \text{v } \Omega, \\ \mathbf{v}_i |_{\partial\Omega} &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Díky regularitě Stokesova problému máme pro s.v. $t \in (0,T)$ a s.v. $h \in (0, T-t)$

$$\frac{1}{h} \|\pi_i(t+h) - \pi_i(t)\|_{s_i} \le \frac{C}{h} \|\widetilde{\mathbf{H}}_i(t+h) - \widetilde{\mathbf{H}}_i(t)\|_{s_i}.$$

[3]Část věty lze dokázat i pro méně hladké oblasti, to ale vyžaduje poměrně hluboké výsledky z teorie regularity pro stacionární Stokesův problém pro oblasti s lipschitzovskou hranicí.

Proto $\pi_i \in W^{1,q_i}(0,T;L^{s_i}(\Omega))$ a platí

$$\left\| \frac{\partial \pi_i}{\partial t} \right\|_{L^{q_i}(0,T;L^{s_i}(\Omega))} \le C \|\mathbf{H}_i\|_{L^{q_i}(0,T;L^{s_i}(\Omega))}.$$

Dále uvažujme pro s.v. $t \in (0,T)$ Stokesův problém

$$\begin{aligned} -\Delta \mathbf{v}_h &= -\nabla \pi_h + \mathbf{u}(t_0) - \mathbf{u}(t) \quad \text{v } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{v}_h &= 0 \quad \text{v } \Omega, \\ \mathbf{v}_h \,|_{\partial\Omega} &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Opět, použitím regularity Stokesova problému a integrací přes čas máme

$$\|\nabla \pi_h\|_{L^q(0,T;L^s(\Omega))} \le C \|\mathbf{u}\|_{L^q(0,T;L^s(\Omega))}.$$

Zřejmě též $\Delta \pi_h = 0$ na $(0,T) \times \Omega$. Sečtením úloh výše máme pro s.v. $t \in (0,T)$

$$-\Delta(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_h) = -\nabla(\pi_1 + \pi_2 + \pi_h) - \operatorname{div}(\widetilde{\mathbf{H}_1} + \widetilde{\mathbf{H}_2}) + \mathbf{u}(t_0) - \mathbf{u}(t). \tag{3.13}$$

Pokud ve (3.11) vezmeme $\boldsymbol{\varphi}^n \in C_0^\infty((0,T) \times \Omega)^N$ tak, že $\boldsymbol{\varphi}^n \to \boldsymbol{\varphi}$, kde

$$\boldsymbol{\varphi}(\tau, x) = \begin{cases} \boldsymbol{\psi}(x) \in (C_0^\infty(\Omega))^N & \tau \in (t_0, t) \\ \mathbf{0} & \tau \in (0,T) \setminus (t_0, t), \end{cases}$$

máme

$$\int_\Omega (\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}(t_0)) \cdot \boldsymbol{\psi} \, \mathrm{d}x = \int_\Omega (\widetilde{\mathbf{H}_1} + \widetilde{\mathbf{H}_2}) : \nabla \boldsymbol{\psi} \, \mathrm{d}x$$

pro všechna $\boldsymbol{\psi} \in (C_0^\infty(\Omega))^N$, $\operatorname{div} \boldsymbol{\psi} = 0$ a tedy díky Lemmatu 2.3.4 existuje $\pi \in L^r(\Omega)$, $r > 1$ tak, že

$$\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}(t_0) = -\operatorname{div}(\widetilde{\mathbf{H}_1} + \widetilde{\mathbf{H}_2}) + \nabla \pi \qquad \text{v } \mathcal{D}'(\Omega). \tag{3.14}$$

Proto z (3.13) a (3.14) plyne

$$\begin{aligned} -\Delta(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_h) &= -\nabla(\pi_1 + \pi_2 + \pi_h - \pi) \quad \text{v } \Omega, \\ \operatorname{div}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_h) &= 0 \quad \text{v } \Omega, \\ \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_h \,|_{\partial\Omega} &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

a z jednoznačnosti řešení stacionárního Stokesova problému (pro tlak až na aditivní konstantu; ve všech úlohách budeme předpokládat, že jeho integrální střední hodnota je nulová) máme, že

$$\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_h = \mathbf{0} \qquad \pi_1 + \pi_2 + \pi_h = \pi.$$

Proto v $\mathcal{D}'(0,T)$

$$p = \frac{\partial \pi}{\partial t} = p_1 + p_2 + \frac{\partial \pi_h}{\partial t},$$

kde $p_i = \frac{\partial \pi_i}{\partial t}$. Na závěr položíme $p_h = \pi_h$ a využijeme prostorovou regularitu této funkce. ■

Ukažme si jinou možnost rekonstrukce tlaku. K tomu se budeme muset chvíli zabývat nestacionárním Stokesovým problémem

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu\Delta\mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{g} && \text{v } (0,T)\times\Omega, \\
\operatorname{div}\mathbf{u} &= 0 && \text{v } (0,T)\times\Omega, \\
\mathbf{u} &= \mathbf{0} && \text{na } (0,T)\times\partial\Omega, \\
\mathbf{u}(0) &= \mathbf{u}_0 && \text{v } \Omega.
\end{aligned}$$

Slabá formulace je analogická slabé formulaci pro Navier–Stokesovy rovnice. Hledáme $\mathbf{u} \in L^2(0,T;W^{1,2}_{0,\mathrm{div}}(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;(L^2(\Omega))^N)$, $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \in L^2(0,T;(W^{1,2}_{0,\mathrm{div}})^*)$ takové, že

$$\left\langle \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \boldsymbol{\varphi} \right\rangle + \nu \int_\Omega \nabla\mathbf{u} : \nabla\boldsymbol{\varphi}\,\mathrm{d}x = \langle \mathbf{g}, \boldsymbol{\varphi}\rangle \qquad \forall \boldsymbol{\varphi} \in W^{1,2}_{0,\mathrm{div}}(\Omega)$$
$$\text{a s.v. } t \in (0,T),$$

$\mathbf{u}(t) \rightharpoonup \mathbf{u}_0$ v $L^2_{0,\mathrm{div}}(\Omega)$ pro $t \to 0^+$. Zřejmě pak platí (důkaz je analogický důkazu pro evoluční Navier–Stokesovy rovnice, jen o něco jednodušší)

Věta 3.2.3. *Nechť* $\boldsymbol{g} \in L^2(0,T;(W^{-1,2}(\Omega))^N)$, $\Omega \subset \mathbf{R}^N$, $\boldsymbol{u}_0 \in L^2_{0,\mathrm{div}}(\Omega)$.

Potom existuje právě jedno slabé řešení nestacionárního Stokesova problému. Navíc $\boldsymbol{u} \in C([0,T];L^2_{0,\mathrm{div}}(\Omega))$, *a proto* $\lim_{t\to 0^+} \|\boldsymbol{u}(t) - \boldsymbol{u}_0\|_{(L^2(\Omega))^N} = 0$. ■

Analogií Věty 3.2.2 je (důkaz viz [16]):

Věta 3.2.4. *Nechť je počáteční podmínka dostatečně hladká,* $\Omega \in C^2$ *je konvexní a nechť* $\boldsymbol{g} = \operatorname{div}\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{F} \in (L^p((0,T)\times\Omega))^{N^2}$, $1 < p < \infty$.

Potom jediné řešení $\boldsymbol{u} \in L^p(0,T;W^{1,p}_{0,\mathrm{div}}(\Omega)) \cap W^{\frac{1}{2},p}(0,T;(L^p(\Omega))^N)$. *Navíc, tlak*

$$\pi = p_1 + \frac{\partial P}{\partial t},$$

kde P *je harmonická funkce,* $p_1 \in L^p((0,T)\times\Omega)$, $P \in L^p\big(0,T;W^{2,p}(\Omega)\big)$, $\nabla P \in W^{\frac{1}{2},p}(0,T;(L^p(\Omega))^N)$ *a platí*

$$\begin{aligned}
&\|\boldsymbol{u}\|_{W^{\frac{1}{2}}(0,T;(L^p(\Omega))^N)} + \|\nabla\boldsymbol{u}\|_{L^p(0,T;(L^p(\Omega))^{N^2})} + \|p_1\|_{L^p(0,T;L^p(\Omega))} \\
&+ \|\nabla P\|_{W^{\frac{1}{2}}(0,T;(L^p(\Omega))^N)} + \|\nabla P\|_{L^p(0,T;(W^{1,p}(\Omega))^N)} \\
&\le C\,\|\boldsymbol{F}\|_{L^p(0,T;(L^p(\Omega))^{N^2})} + C_1(\boldsymbol{u}_0).
\end{aligned}$$

Dále

$$\|p\|_{W^{1-\frac{1}{2p}-\frac{r}{2},p}(0,T;W_p^{\frac{1}{p}+r}(\Omega))} \le C(\boldsymbol{u}_0, \|\boldsymbol{F}\|_{L^p(0,T;(L^p(\Omega))^{N^2})})\,,\ r \in \Big(0, 1-\frac{1}{p}\Big].$$

■

Opět jsme nebyli schopni odstranit harmonickou část tlaku, která je hladká v prostoru, ale ne v čase. O něco lepší situace je v případě, kde pravá strana $\mathbf{f} \in L^t(0,T;L^s(\Omega))$. Pak máme (viz [12])

Věta 3.2.5 (Solonnikov, Giga, Sohr). *Nechť je počáteční podmínka dostatečně hladká, $\Omega \in C^2$, nechť $\boldsymbol{g} \in L^t\left(0,T;(L^s(\Omega))^N\right)$.*

Potom jediné řešení také splňuje $\nabla^2 \boldsymbol{u}$, $\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}$, $\nabla p \in L^t(0,T;(L^s(\Omega))^k)$ a platí

$$\left(\left\|\nabla^2 \boldsymbol{u}\right\|_X + \left\|\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}\right\|_X + \|\nabla p\|_X\right) \le C\left(\boldsymbol{u}_0, \|\boldsymbol{g}\|_X\right),$$

kde $X = L^t\left(0,T;(L^s(\Omega))^k\right)$, $1 < t, s < \infty$, $k = N^2$ resp. N. ■

Poznámka. Původně byly tyto odhady dokázány pouze pro $t = s$ V.A. Solonnikovem, práce [12] je rozšířením pro $t \neq s$.

Nyní můžeme tyto odhady pro nestacionární Stokesův problém použít následovně. Konvektivní člen dáme na pravou stranu. Máme

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu\Delta\mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f} - \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}, \\ \operatorname{div}\mathbf{u} &= 0, \\ \mathbf{u}(0) &= \mathbf{u}_0, \\ \mathbf{u}\,|_{\partial\Omega} &= \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Protože naše řešení $\mathbf{u}$ existuje a Stokesův problém má jednoznačně definované řešení, je jasné, že odhady z Vět 3.2.4 a 3.2.5 můžeme použít na naše řešení. Uvědomme si též, že Věta 3.2.4 se pro naše účely moc nehodí, tlak není L^p-funkce, harmonická část má špatnou regularitu v čase. Proto použijeme spíše Větu 3.2.5. Předpoklady na pravou stranu $\mathbf{f}$ si můžeme sami upravit. Počítejme tedy chvíli, v jakých prostorech máme konvektivní člen:

a) $N = 2$

$$\int_\Omega |\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}|^s \,\mathrm{d}x \le \|\nabla\mathbf{u}\|_2^s \,\|\mathbf{u}\|^s_{\frac{2s}{2-s}}, \quad 1 < s < 2,$$
$$\|\mathbf{u}\|_{\frac{2s}{2-s}} \le C\,\|\mathbf{u}\|_2^{\frac{2-s}{s}}\,\|\mathbf{u}\|_{1,2}^{\frac{2s-2}{s}},$$

tj.

$$\left(\int_0^T \left(\int_\Omega |\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}|^s \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{t}{s}} \mathrm{d}\tau\right)^{\frac{1}{t}} \le C\left(\int_0^T \|\nabla\mathbf{u}\|_2^{t+(2s-2)\frac{t}{s}}\,\|\mathbf{u}\|_2^{\frac{t}{s}(2-s)}\right)^{\frac{1}{t}}$$
$$\le C\,\|\mathbf{u}\|^{\frac{1}{s}(2-s)}_{L^\infty(0,T;(L^2(\Omega))^2)}\,\|\mathbf{u}\|^{\frac{3s-2}{s}}_{L^2(0,T;(W^{1,2}(\Omega))^2)}$$

za předpokladu, že

$$t + (2s-2)\frac{t}{s} = 2 \implies \frac{2}{t} + \frac{2}{s} = 3,\ s < 2.$$

b) $N = 3$

$$\frac{2s}{2-s} \le 6, \text{ tj. } s \le \frac{3}{2}.$$

Pak

$$\|\mathbf{u}\|_{\frac{2s}{2-s}} \le C\,\|\mathbf{u}\|_2^{\frac{3-2s}{s}}\,\|\mathbf{u}\|_{1,2}^{\frac{3s-3}{s}}$$
$$\left(\frac{2-s}{2s} = \frac{\alpha}{2} + \frac{1-\alpha}{6} \Rightarrow \alpha = \frac{3-2s}{s},\ 1-\alpha = \frac{3s-3}{s}\right)$$

a

$$\Big(\int_0^T \big(\int_\Omega |\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}|^s \,\mathrm{d}x\big)^{\frac{t}{s}}\,\mathrm{d}t\Big)^{\frac{1}{t}} \le C\Big(\int_0^T \|\mathbf{u}\|_{1,2}^{t+(3s-3)\frac{t}{s}}\,\|\mathbf{u}\|_2^{\frac{1}{s}(3-2s)}\,\mathrm{d}t\Big)^{\frac{1}{t}}$$
$$\le C\,\|\mathbf{u}\|^{\frac{1}{s}(3-2s)}_{L^\infty(0,T;(L^2(\Omega))^3)}\,\|\mathbf{u}\|^{\frac{4s-3}{s}}_{L^2(0,T;(W^{1,2}(\Omega))^3)}\,,$$

je-li

$$t+(2s-3)\frac{t}{s}=2 \Longrightarrow \frac{2}{t}+\frac{3}{s}=4,\ s\le\frac{3}{2}.$$

Máme tedy

Věta 3.2.6. *Nechť $\boldsymbol{u}$ je slabé řešení Navier–Stokesových rovnic a nechť $\Omega \in C^2$, $\boldsymbol{f}$ a $\boldsymbol{u}_0$ jsou dostatečně hladké.*

Potom existuje tlak a Navier–Stokesovy rovnice jsou splněny s.v. na časoprostoru. Navíc

$$\nabla^2\boldsymbol{u},\ \frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t},\ \nabla p\in L^t(0,T;(L^s(\Omega))^k),\ 1<s<\frac{N}{N-1},\ k=N^2 \text{ resp. } N$$
$$\frac{2}{t}+\frac{N}{s}=N+1,\ N=2,3.$$

■

Poznámka. Tento výsledek zůstává v platnosti i pro $N > 3$.

Podívejme se, jakou informaci nám to ve třech dimenzích dává pro samotný tlak. Pro zajištění jednoznačnosti budeme předpokládat, že $\int_\Omega p(x,t)\,\mathrm{d}x = 0$ pro s.v. $t \in (0,T)$. Víme, že

$$\nabla p\in L^t\left(0,T;L^s\right),\qquad \frac{2}{t}+\frac{3}{s}=4\ ,\ s<\frac{3}{2},$$

tj.

$$p\in L^t(0,T;L^{s^*}(\Omega)),\quad s^*=\frac{3s}{3-s},\qquad \frac{2}{t}+\frac{3}{s^*}=\frac{2}{t}+\frac{3-s}{s}$$
$$\Longrightarrow \frac{2}{t}+\frac{3}{s^*}=3.$$

Pokud chceme, aby $t = s^* \Rightarrow \frac{2}{t} + \frac{3}{t} = 3 \Rightarrow t = \frac{5}{3}$ tj. $p \in L^{\frac{5}{3}}\left((0,T)\times\Omega\right)$. (Ověřte si sami, že pro $N = 2$ máme $p \in L^q\left((0,T)\times\Omega\right)$ pro libovolné $q < 2$.)

3.3 Regularita ($N = 2$)

Ukažme nyní, že námi zkonstruované jednoznačné slabé řešení Navier–Stokesových rovnic je ve dvou prostorových dimenzích hladší. Dokážeme následující tvrzení

Věta 3.3.1. *Nechť $\Omega \in C^2$, $\boldsymbol{u}_0 \in W^{1,2}_{0,\mathrm{div}}(\Omega)$, $\boldsymbol{f} \in L^2(0,T;(L^2(\Omega))^2)$.*

Potom slabé řešení Navier–Stokesových rovnic ve dvou prostorových dimenzích splňuje

$$\nabla^2 \boldsymbol{u}, \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}, \nabla p \in L^2(0,T;(L^2(\Omega))^k), \nabla \boldsymbol{u} \in L^\infty(0,T;(L^2(\Omega))^4),\ k = 4 \,\text{resp.}\, 2,$$

$$\left\|\nabla^2 \boldsymbol{u}\right\|_{L^2(0,T;(L^2(\Omega))^4)} + \left\|\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}\right\|_{L^2(0,T;(L^2(\Omega))^2)} + \|\nabla p\|_{L^2(0,T;(L^2(\Omega))^2)}$$
$$+ \|\nabla \boldsymbol{u}\|_{L^\infty(0,T;(L^2(\Omega))^4)} \le C(\|\boldsymbol{f}\|_{L^2(0,T;(L^2(\Omega))^2)}, \|\boldsymbol{u}_0\|_{1,2}).$$

Speciálně tedy $\boldsymbol{u} \in C([0,T];(W^{1,2}(\Omega))^2)$*. Je-li pouze* $\boldsymbol{u}_0 \in (L^2(\Omega))^2$*, potom výše uvedené odhady platí na* $[\delta, T]$*,* $\delta > 0$*, libovolně malé.*

Dokažme nejprve jedno lemma:

Lemma 3.3.1. *Označme* P *projekci z* $(L^2(\Omega))^N$ *do* $L^2_{0,\mathrm{div}}(\Omega)$ *(nazývá se též někdy Lerayův projektor). Nechť* $\Omega \in C^2$*.*

Potom

$$\exists C_1, C_2 : \forall \boldsymbol{u} \in W^{1,2}_{0,\mathrm{div}}(\Omega) \cap (W^{2,2}(\Omega))^N$$

platí

$$C_1 \|\boldsymbol{u}\|_{2,2} \le \|P\Delta \boldsymbol{u}\|_2 \le C_2 \|\boldsymbol{u}\|_{2,2}.$$

Důkaz. Uvažujme Stokesův problém:

$$\begin{aligned} -\nu\Delta \mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f} \quad \text{v } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0 \quad \text{v } \Omega, \\ \mathbf{u}|_{\partial\Omega} &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $\mathbf{f} \in L^2_{0,\mathrm{div}}(\Omega)$. Problém je možno přepsat na tvar

$$\begin{aligned} -\nu P\Delta \mathbf{u} &= \mathbf{f} \quad \text{v } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0 \quad \text{v } \Omega, \\ \mathbf{u}|_{\partial\Omega} &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Díky regularitě řešení Stokesova problému víme, že řešení splňuje

$$\|\mathbf{u}\|_{2,2} \le C \|\mathbf{f}\|_2,$$

a tudíž

$$\|\mathbf{u}\|_{2,2} \le C \|\mathbf{f}\|_2 = C \|P\Delta \mathbf{u}\|_2.$$

Na druhou stranu, díky tomu, že P je projektor,

$$\|P\Delta \mathbf{u}\|_2 \le \|\Delta \mathbf{u}\|_2 \le C \|\mathbf{u}\|_{2,2}.$$

■

Důkaz (Věty 3.3.1)**.** Připomeňme si, že jsme řešení konstruovali pomocí Galerkinovské aproximace. Vezměme si ji a násobme j-tou rovnici $\dot{c}_j^m(t)$, sečtěme přes j a integrujme přes čas. Máme (vlastně použijeme jako testovací funkci $\frac{\partial \mathbf{u}^m}{\partial t}$)

$$\begin{aligned} &\int_0^t \int_\Omega \left|\frac{\partial \mathbf{u}^m}{\partial t}\right|^2 \mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau + \frac{1}{2}\nu \int_0^t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \int_\Omega |\nabla \mathbf{u}^m|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau \\ = &\int_0^t \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}^m}{\partial t} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau - \int_0^t \int_\Omega (\mathbf{u}^m \cdot \nabla \mathbf{u}^m) \cdot \frac{\partial \mathbf{u}^m}{\partial t} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau. \end{aligned}$$

Současně násobme j-tou rovnici $\lambda_j c_j^m(t)$, sečtěme přes j a integrujme přes čas. Připomeňme, že

$$\int_\Omega \nabla \mathbf{w}^j : \nabla \boldsymbol{\varphi} \, \mathrm{d}x = \lambda_j \int_\Omega \mathbf{w}^j \cdot \boldsymbol{\varphi} \, \mathrm{d}x \qquad \forall \boldsymbol{\varphi} \in W^{1,2}_{0,\mathrm{div}}(\Omega),$$

tedy vlastně použijeme jako testovací funkci $-P\Delta \mathbf{u}^m$. Máme

$$\frac{1}{2} \int_0^t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \int_\Omega |\nabla \mathbf{u}^m|^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}\tau + \nu \int_0^t \int_\Omega \nabla \mathbf{u}^m : \Big(\sum_{j=1}^m c_j(\tau) \lambda_j \nabla \mathbf{w}^j \Big) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}\tau$$
$$= \int_0^t \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \underbrace{\sum_{j=1}^m c_j(\tau) \lambda_j \mathbf{w}^j}_{=-P\Delta \mathbf{u}^m} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}\tau - \int_0^t \int_\Omega (\mathbf{u}^m \cdot \nabla \mathbf{u}^m) \cdot \Big(\sum_{j=1}^m c_j(\tau) \lambda_j \mathbf{w}^j \Big) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}\tau.$$

Počítejme

$$\int_0^t \int_\Omega \Big(\nabla \mathbf{u}^m : \sum_{j=1}^m c_j(\tau) \lambda_j \nabla \mathbf{w}^j \Big) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}\tau$$
$$\underbrace{= - \int_0^t \int_\Omega \Big(\Delta \mathbf{u}^m : \sum_{j=1}^m c_j(\tau) \lambda_j \mathbf{w}^j \Big) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}\tau \, .}_{-\int_0^t \int_\Omega (P\Delta \mathbf{u}^m + \nabla z)\left(\sum_{j=1}^m c_j(\tau)\lambda_j w^j\right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}\tau}$$

Celkem tedy máme

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \Big\| \frac{\partial \mathbf{u}^m}{\partial t} \Big\|_2^2 \mathrm{d}\tau + \nu \int_0^t \big\| \nabla^2 \mathbf{u}^m \big\|_2^2 \, \mathrm{d}\tau + \|\nabla \mathbf{u}^m\|_2^2 (t) \\
&\le C \Big(\int_0^t \Big\| \frac{\partial \mathbf{u}^m}{\partial t} \Big\|_2^2 \mathrm{d}\tau + \nu \int_0^t \|P\Delta \mathbf{u}^m\|_2^2 \, \mathrm{d}\tau + \frac{1}{2}(1+\nu) \|\nabla \mathbf{u}^m\|_2^2 (t) \Big) \\
&\le C \int_0^t \|\mathbf{f}\|_2 \Big(\Big\| \frac{\partial \mathbf{u}^m}{\partial t} \Big\|_2 + \|P\Delta \mathbf{u}^m\|_2 \Big) \, \mathrm{d}\tau \qquad (3.16) \\
&+ C \int_0^t \Big(\int_\Omega |\nabla \mathbf{u}^m|^2 |\mathbf{u}^m|^2 \, \mathrm{d}x \Big)^{1/2} \Big(\int_\Omega \Big(\frac{\partial \mathbf{u}^m}{\partial t} \Big)^2 + (P\Delta \mathbf{u}^m)^2 \, \mathrm{d}x \Big)^{1/2} \mathrm{d}\tau \\
&+ C \|\nabla \mathbf{u}^m(0)\|_2^2 \le \frac{1}{2} \int_0^t \Big\| \frac{\partial \mathbf{u}^m}{\partial t} \Big\|_2^2 \mathrm{d}\tau + \frac{1}{4} \nu \int_0^t \big\| \nabla^2 \mathbf{u}^m \big\|_2^2 \, \mathrm{d}\tau \\
&+ C(\nu) \int_0^t \|\mathbf{f}\|_2^2 \, \mathrm{d}\tau + C \, \|\nabla \mathbf{u}^m(0)\|_2^2 + \underbrace{C \int_0^t \int_\Omega |\nabla \mathbf{u}^m|^2 \, |\mathbf{u}^m|^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}\tau,}_{I}
\end{aligned}$$

přičemž konvektivní člen odhadneme

$$\begin{aligned}
I &\le \int_0^t \|\nabla \mathbf{u}^m\|_4^2 \, \|\mathbf{u}^m\|_4^2 \, \mathrm{d}\tau \le C \int_0^t \|\nabla \mathbf{u}^m\|_{1,2} \, \|\nabla \mathbf{u}^m\|_2^2 \, \|\mathbf{u}^m\|_2 \, \mathrm{d}\tau \\
&\le \frac{1}{4} \nu \int_0^t \big\| \nabla^2 \mathbf{u}^m \big\|_2^2 + C(\nu) \int_0^t \|\nabla \mathbf{u}^m\|_2^4 \, \mathrm{d}\tau.
\end{aligned}$$

Celkem máme

$$\begin{aligned}&\int_0^t \left\|\frac{\partial \mathbf{u}^m}{\partial t}\right\|_2^2 \mathrm{d}\tau + \nu \int_0^t \left\|\nabla^2 \mathbf{u}^m\right\|_2^2 \mathrm{d}\tau + \|\nabla \mathbf{u}^m\|_2^2 (t)\\ &\le \|\nabla \mathbf{u}^m(0)\|_2^2 + C(\nu)\int_0^t \|\mathbf{f}\|_2^2 \mathrm{d}\tau + C(\nu)\int_0^t \|\nabla \mathbf{u}^m\|_2^2 \|\nabla \mathbf{u}^m\|_2^2 \mathrm{d}\tau.\end{aligned}$$

Z Gronwallovy nerovnosti (integrální tvar)

$$\begin{aligned}f(t) &\le f(0) + \int_0^t g(\tau)\,\mathrm{d}\tau + \int_0^t h(\tau) f(\tau)\,\mathrm{d}\tau \Longrightarrow\\ f(t) &\le \Big(f(0) + \int_0^t g(\tau)\,\mathrm{d}\tau\Big) \mathrm{e}^{\int_0^t h(\tau)\,\mathrm{d}\tau}\end{aligned}$$

volbou $f = \|\nabla \mathbf{u}^m(t)\|_2^2$, $h = \|\nabla \mathbf{u}^m(t)\|_2^2 \in L^1(0,T)$ plyne

$$\sup_{(0,T)} \|\nabla \mathbf{u}^m(t)\|_2 \le C\big(\|\nabla \mathbf{u}^m(0)\|_2 , \int_0^T \|\mathbf{f}\|_2^2 \,\mathrm{d}\tau,\ T\big).$$

Pokud toto dosadíme zpět do odhadu výše, dostáváme

$$\begin{aligned}&\int_0^t \left\|\frac{\partial \mathbf{u}^m}{\partial t}\right\|_2^2 \mathrm{d}\tau + \nu \int_0^t \|P\Delta \mathbf{u}^m\|_2^2 \,\mathrm{d}\tau + \sup_{(0,T)} \|\nabla \mathbf{u}^m(t)\|_2^2\\ &\le C\Big(\|\nabla \mathbf{u}^m(0)\|_2 , \int_0^T \|\mathbf{f}\|_2^2 \,\mathrm{d}\tau, T\Big) \le C\left(\mathbf{u}_0, \mathbf{f}, T\right),\end{aligned}$$

neboť

$$\|\nabla \mathbf{u}^m(0)\|_2 \le \|\nabla \mathbf{u}_0\|_2 .$$

Nyní stačí použít Lemma 3.3.1 a přejít s $m \to \infty$. Pokud nemáme informaci o počáteční podmínce, zvolíme funkci

$$\begin{aligned} g(t) &:= 0 \qquad 0 < t < \frac{\delta}{2},\\ g(t) &:= 1 \qquad t > \delta,\\ g \in C^1\left([0,T]\right) & \qquad g \ge 0\end{aligned}$$

a před integrováním přes čas nerovnost násobíme funkcí g. Potom

$$\int_0^t g(\tau) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \|\nabla \mathbf{u}^m(\tau)\|_2^2 \,\mathrm{d}\tau = g(t) \|\nabla \mathbf{u}^m(t)\|_2^2 - \int_0^t g'(\tau) \|\nabla \mathbf{u}^m(\tau)\|_2^2 \,\mathrm{d}\tau.$$

Druhý člen dáme na pravou stranu a v odhadech pokračujeme stejně jako výše. Díky vlastnostem funkce se nám „ztratí“ informace o chování pro časy blížící se k nule, ale zato nepotřebujeme vědět nic o gradientu počáteční podmínky. Věta je dokázána. ■

Nyní bychom mohli studovat další regularitu. Je možné dokázat, že je-li $\operatorname{div} \mathbf{u}_0 = 0$, $\mathbf{u}_0 = 0$ na $\partial\Omega$ a $\mathbf{f} \in (C^\infty\left((0,T) \times \overline{\Omega}\right))^N$, potom též $\mathbf{u} \in (C^\infty\left((0,T) \times \overline{\Omega}\right))^2$, $p \in C^\infty\left((0,T) \times \overline{\Omega}\right)$ — pozor, ne až do času 0, to jen při splnění jistých podmínek kompatibility mezi $\mathbf{u}_0$ a $\mathbf{f}$ + regularita $\mathbf{u}_0$. To nás nebude v tomto okamžiku zajímat. My budeme studovat spíše jednoznačnost a regularitu ve třech dimenzích.

3.4 Jednoznačnost ($N = 3$)

Nejprve si uvědomme, že obecně nevíme, zda každé slabé řešení Navier–Stokesových rovnic ve třech prostorových dimenzích nutně splňuje energetickou nerovnost. Platí ale

Lemma 3.4.1. *Nechť $\boldsymbol{u}$ je slabé řešení Navier–Stokesových rovnic, které navíc patří do $L^4\left(0,T;(L^4(\Omega))^N\right)$*[4]*.*

Potom $\boldsymbol{u}$ splňuje energetickou rovnost.

Důkaz. Ukažme, že je-li navíc $\mathbf{u}$ slabé řešení Navier–Stokesových rovnic a navíc patří do $L^4\left(0,T;(L^4(\Omega))^N\right)$, potom $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \in L^2(0,T;(W^{1,2}_{0,\mathrm{div}})^*)$. Máme totiž

$$
\begin{aligned}
&\sup_{\substack{\boldsymbol{\varphi}\in L^2(0,T;W^{1,2}_{0,\mathrm{div}}(\Omega))\\ \|\boldsymbol{\varphi}\|\le 1}} \Big| \int_0^T \langle \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \boldsymbol{\varphi}\rangle \,\mathrm{d}\tau \Big| = \\
&\sup_{\substack{\boldsymbol{\varphi}\in L^2(0,T;W^{1,2}_{0,\mathrm{div}}(\Omega))\\ \|\boldsymbol{\varphi}\|\le 1}} \Big| \int_0^T \Big(-\nu \int_\Omega \nabla\mathbf{u} : \nabla\boldsymbol{\varphi}\,\mathrm{d}x + \langle \mathbf{f}, \boldsymbol{\varphi}\rangle - \int_\Omega (\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u})\cdot\boldsymbol{\varphi}\,\mathrm{d}x \Big)\,\mathrm{d}\tau \Big| \\
&\le \sup_{\substack{\boldsymbol{\varphi}\in L^2(0,T;W^{1,2}_{0,\mathrm{div}}(\Omega))\\ \|\boldsymbol{\varphi}\|\le 1}} \int_0^T \Big(\|\nabla\mathbf{u}\|_2 \|\nabla\boldsymbol{\varphi}\|_2 + \|\mathbf{f}\|_{-1,2} \|\boldsymbol{\varphi}\|_{1,2} + \|\nabla\boldsymbol{\varphi}\|_2 \|\mathbf{u}\|_4^2 \Big)\,\mathrm{d}\tau \\
&\le C.
\end{aligned}
$$

Proto můžeme vzít za testovací funkci samotné řešení $\mathbf{u}$, všechny integrály jsou konečné. Dostáváme

$$
\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \|\mathbf{u}\|_2^2 + \nu \int_\Omega |\nabla\mathbf{u}|^2 \,\mathrm{d}x = -\underbrace{\int_\Omega (\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u})\cdot\mathbf{u}\,\mathrm{d}x}_{=0} + \langle \mathbf{f}, \mathbf{u}\rangle\,.
$$

Navíc $\mathbf{u} \in C([0,T];L^2_{0,\mathrm{div}}(\Omega))$, a tudíž integrací přes čas

$$
\frac{1}{2}\|\mathbf{u}(t)\|_2^2 + \nu\int_0^t\int_\Omega |\nabla\mathbf{u}|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{2}\|\mathbf{u}_0\|_2^2 + \int_0^t \langle \mathbf{f}, \mathbf{u}\rangle\,\mathrm{d}t \qquad \forall t\in[0,T]\,.
$$

■

Poznámka. Připomeňme, že ve dvou prostorových dimenzích patří slabé řešení Navier–Stokesových rovnic do $\mathbf{u} \in L^4(0,T;(L^4(\Omega))^2)$ a tedy splňuje nejen energetickou nerovnost, ale dokonce energetickou rovnost.

Obecně není známo, zda je třída slabých řešení ve třech prostorových dimenzích třídou jednoznačnosti. Platí ale

Věta 3.4.1. *Nechť $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ jsou dvě slabá řešení Navier–Stokesových rovnic odpovídající týmž datům. Nechť $\boldsymbol{u}$ splňuje energetickou nerovnost a nechť $\boldsymbol{v}$ splňuje navíc*

$$
\boldsymbol{v} \in L^t(0,T;(L^s(\Omega))^3),\ \frac{2}{t}+\frac{3}{s}=1,\ s\in[3,\infty]\,.
$$

Potom $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}$ s.v. na $(0,T)\times\Omega$.

[4] Tuto podmínku se podařilo v jistém smyslu zeslabit, viz [6]. Podmínku na dodatečnou regularitu řešení lze vyjádřit pomocí Sobolev–Slobodetského prostorů, tj. prostorů s neceločíselnou derivací.

Poznámka. Jedná se o jednoznačnost typu silné řešení = slabé řešení. Tedy je vidět, že regularita a jednoznačnost slabých řešení jsou dosti provázány. Podmínky na $\mathbf{v}$ z Věty 3.4.1 se v literatuře často nazývají Prodi–Serrinovy podmínky.

Důkaz (Věty 3.4.1)**.** Budeme jej dělat pro $s > 3$. Případ $L^\infty(0,T;(L^3(\Omega))^3)$ je technicky komplikovanější. Nejprve proveďme formální důkaz.

Vezměme jako testovací funkci pro $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ rozdíl $\mathbf{u}-\mathbf{v}$ (to ale nemůžeme) a odečtěme od sebe výsledné nerovnosti. Máme

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|_2^2+\nu\int_\Omega|\nabla(\mathbf{u}-\mathbf{v})|^2\,\mathrm{d}x=\int_\Omega(\mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v}-\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u})\cdot(\mathbf{u}-\mathbf{v})\,\mathrm{d}x\\
&=\int_\Omega(\mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}-\mathbf{v})\,\mathrm{d}x-\underbrace{\int_\Omega(\mathbf{u}\cdot\nabla(\mathbf{u}-\mathbf{v}))\cdot(\mathbf{u}-\mathbf{v})\,\mathrm{d}x}_{=0} \qquad (3.17)\\
&-\int_\Omega(\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}-\mathbf{v})\,\mathrm{d}x=-\int_\Omega((\mathbf{u}-\mathbf{v})\cdot\nabla\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}-\mathbf{v})\,\mathrm{d}x\\
&=\int_\Omega(\mathbf{u}-\mathbf{v})\otimes\mathbf{v}:\nabla(\mathbf{u}-\mathbf{v})\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Odhadujme člen napravo

$$\begin{aligned}
&|\mathrm{K.\check{C}.}|\le\int_\Omega\underbrace{|\nabla(\mathbf{u}-\mathbf{v})|}_{2}\underbrace{|\mathbf{u}-\mathbf{v}|}_{\frac{2s}{s-2}}\underbrace{|\mathbf{v}|}_{s}\le\|\nabla(\mathbf{u}-\mathbf{v})\|_2\,\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|_{\frac{2s}{s-2}}\,\|\mathbf{v}\|_s\\
&\le\|\nabla(\mathbf{u}-\mathbf{v})\|_2^{\frac{s+3}{s}}\,\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|_2^{\frac{s-3}{s}}\,\|\mathbf{v}\|_s\,,\\
&\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|_{\frac{2s}{s-2}}\le\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|_2^{\frac{s-3}{s}}\,\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|_6^{\frac{3}{s}}\,,\\
&\Longrightarrow|\mathrm{K.\check{C}.}|\le\frac{1}{2}\nu\,\|\nabla(\mathbf{u}-\mathbf{v})\|_2^2+C(\nu)\,\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|_2^2\,\|\mathbf{v}\|_s^{\frac{2s}{s-3}}\,.
\end{aligned}$$

(Je-li $s=3$, pak tento důkaz nefunguje.) Pro $s=\infty$ lze konvektivní člen odhadnout pomocí

$$\|\mathbf{v}\|_\infty\,\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|_2\,\|\nabla(\mathbf{u}-\mathbf{v})\|_2\le\frac{1}{2}\,\|\nabla(\mathbf{u}-\mathbf{v})\|_2^2+C\,\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|_2^2\,\|\mathbf{v}\|_\infty^2\,.$$

Tedy celkem

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|_2^2\le C\,\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|_2^2\,\|\mathbf{v}\|_s^t\,,$$

a protože $(\mathbf{u}-\mathbf{v})(0)=\mathbf{0}$, plyne z Gronwallovy nerovnosti, že $\mathbf{u}-\mathbf{v}=\mathbf{0}$.

Pokusme se nyní odvodit vztah (3.17) rigorózně; ve skutečnosti získáme tvar zintegrovaný přes čas a místo rovnosti budeme mít nerovnost. To však na samotný závěr důkazu nemá vliv, bude nám to naprosto stačit.

Prvním vztahem, který máme k dispozici, je energetická nerovnost pro $\mathbf{u}$:

$$\frac{1}{2}\,\|\mathbf{u}(t)\|_2^2+\nu\int_0^t\int_\Omega|\nabla\mathbf{u}|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau\le\frac{1}{2}\,\|\mathbf{u}_0\|_2^2+\int_0^t\langle\mathbf{f},\mathbf{u}\rangle\;\mathrm{d}\tau. \qquad (3.18)$$

Dále $\mathbf{v} \in L^4(0,T;(L^4(\Omega))^3)$, což plyne jednoduše interpolací, a tudíž dle Lemmatu 3.4.1

$$\frac{1}{2}\|\mathbf{v}(t)\|_2^2 + \nu\int_0^t\int_\Omega |\nabla\mathbf{v}|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{2}\|\mathbf{u}_0\|_2^2 + \int_0^t \langle\mathbf{f},\mathbf{v}\rangle\,\mathrm{d}\tau. \tag{3.19}$$

Je třeba ukázat, že mohu vzít za testovací funkci pro $\mathbf{v}$ funkci $\mathbf{u}$ a naopak. Z důkazu Lemmatu 3.4.1 víme, že $\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} \in L^2(0,T;(W^{1,2}_{0,\mathrm{div}})^*)$, a proto můžeme použít $\mathbf{u} \in L^2(0,T;W^{1,2}_{0,\mathrm{div}}(\Omega))$ jako testovací funkci. Máme tedy

$$\begin{aligned}&-\int_0^t \Big\langle\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t},\mathbf{u}\Big\rangle - \int_0^t\int_\Omega(\mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v})\cdot\mathbf{u}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau - \nu\int_0^t\int_\Omega \nabla\mathbf{v}:\nabla\mathbf{u}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau\\ &= -\int_0^t\langle\mathbf{f},\mathbf{u}\rangle\,\mathrm{d}\tau.\end{aligned} \tag{3.20}$$

Zbývá poslední — testování rovnice pro $\mathbf{u}$ funkcí $\mathbf{v}$. Ukažme nejprve, že $\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} \in \Big(L^2(0,T;W^{1,2}_{0,\mathrm{div}}(\Omega)) \cap L^t(0,T;(L^s(\Omega))^3)\Big)^*$:

$$\begin{aligned}\int_0^T \Big\langle\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t},\boldsymbol{\varphi}\Big\rangle\,\mathrm{d}\tau &= -\nu\int_0^T\int_\Omega \nabla\mathbf{u}:\nabla\boldsymbol{\varphi}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau - \int_0^T\int_\Omega(\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u})\cdot\boldsymbol{\varphi}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau\\ &\quad -\int_0^T\langle\mathbf{f},\boldsymbol{\varphi}\rangle\,\mathrm{d}\tau.\end{aligned}$$

První a třetí člen odhadujeme standardně, pro konvektivní člen máme (viz výše)

$$\begin{aligned}&\Big|\int_0^T\int_\Omega(\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u})\cdot\boldsymbol{\varphi}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau\Big| \le \int_0^T \|\nabla\mathbf{u}\|_2\,\|\boldsymbol{\varphi}\|_s\,\|\mathbf{u}\|_{\frac{2s}{s-2}}\,\mathrm{d}\tau\\ &\le \Big(\int_0^T\|\nabla\mathbf{u}\|_2^2\,\mathrm{d}\tau\Big)^{\frac{s+3}{2s}}\Big(\int_0^T\|\boldsymbol{\varphi}\|_s^{\frac{2s}{s-3}}\,\mathrm{d}\tau\Big)^{\frac{s-3}{2s}}\|\mathbf{u}\|^{1-\frac{3}{s}}_{L^\infty(0,T;(L^2(\Omega))^3)}.\end{aligned}$$

Případ $s = \infty$ je ponechán jako cvičení čtenáři.

Tudíž můžeme testovat rovnici pro $\mathbf{u}$ funkcí $\mathbf{v}$:

$$\begin{aligned}&-\int_0^t\Big\langle\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t},\mathbf{v}\Big\rangle\,\mathrm{d}\tau - \int_0^t\int_\Omega(\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u})\cdot\mathbf{v}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau\\ &-\nu\int_0^t\int_\Omega\nabla\mathbf{u}:\nabla\mathbf{v}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau = -\int_0^t\langle\mathbf{f},\mathbf{v}\rangle\,\mathrm{d}\tau.\end{aligned} \tag{3.21}$$

Budeme-li postupovat stejně jako v Lemmatu 2.2.4 (viz též poznámka před ním), můžeme dokázat (pomocí aproximace), že

$$\begin{aligned}&\int_0^t\Big(\Big\langle\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t},\mathbf{v}\Big\rangle + \Big\langle\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t},\mathbf{u}\Big\rangle\Big)\,\mathrm{d}\tau = \int_0^t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau\\ &= \int_\Omega(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})(t)\,\mathrm{d}x - \int_\Omega(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})(0)\,\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{3.22}$$

Poznamenejme, že $\mathbf{u} \in C([0,T];(L^2_{0,\mathrm{div}}(\Omega))_w)$ a $\mathbf{v} \in C([0,T];L^2_{0,\mathrm{div}}(\Omega))$, tedy hodnota v nule je dobře definovaná. Pokud sečteme (3.18)–(3.21) a použijeme

(3.22), dostáváme

$$\frac{1}{2}\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|_2^2(t)+\nu\int_0^t\int_\Omega|\nabla(\mathbf{u}-\mathbf{v})|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau\le\int_0^t\int_\Omega(\mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v})\cdot\mathbf{u}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau$$
$$+\int_0^t\int_\Omega(\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u})\cdot\mathbf{v}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau$$

a dále postupujeme úplně stejně jako ve formální části důkazu. ∎

3.5 Globální podmíněná regularita ($N = 3$)

Cílem je dokázat následující

Věta 3.5.1. *Nechť $\Omega\subset\mathbf{R}^3$, $\Omega\in C^2$, $\boldsymbol{u}$ je slabé řešení Navier–Stokesových rovnic s počáteční podmínkou $\boldsymbol{u}_0\in L^2_{0,\mathrm{div}}(\Omega)$ a pravou stranou $\boldsymbol{f}\in L^2(0,T;(L^2(\Omega))^3)$. Nechť $\boldsymbol{u}\in L^t(0,T;(L^s(\Omega))^3)$, $\frac{2}{t}+\frac{3}{s}\le 1$, $s>3$ nebo $\|\boldsymbol{u}\|_{L^\infty(0,T;(L^3(\Omega))^3)}$ je dostatečně malá.*

Potom toto slabé řešení $\boldsymbol{u}\in L^2(\varepsilon,T;(W^{2,2}(\Omega))^3)\cap L^\infty(\varepsilon,T;(W^{1,2}(\Omega))^3)$, $\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t}\in L^2(\varepsilon,T;(L^2(\Omega))^3)$ $\forall\varepsilon>0$. Je-li $\boldsymbol{u}_0\in W^{1,2}_{0,\mathrm{div}}(\Omega)$, pak lze brát $\varepsilon=0$.

Větu dokážeme ve dvou krocích. Nejprve uvažujme úlohu

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}+\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{v}-\nu\Delta\mathbf{v}+\nabla\pi &= \mathbf{f},\\ \operatorname{div}\mathbf{v} &= 0,\\ \mathbf{v}(0,x) &= \mathbf{u}_0(x),\\ \mathbf{v}|_{\partial\Omega} &= \mathbf{0}\end{aligned}\tag{3.23}$$

(ve slabém smyslu). Ukážeme nejprve

Lemma 3.5.1. *Nechť $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{u}_0$, $\boldsymbol{f}$ a Ω splňují předpoklady Věty 3.5.1. Nechť navíc $\boldsymbol{u}\in L^2(0,T;W^{1,2}_{0,\mathrm{div}}(\Omega))\cap L^\infty(0,T;L^2_{0,\mathrm{div}}(\Omega))$.*

Potom existuje slabé řešení úlohy (3.23). Navíc, $\boldsymbol{v}\in L^2(\varepsilon,T;(W^{2,2}(\Omega))^3)$ $\cap L^\infty(\varepsilon,T;(W^{1,2}(\Omega))^3)$, $\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}\in(L^2(\varepsilon,T;L^2(\Omega))^3)$. Je-li $\boldsymbol{u}_0\in W^{1,2}_{0,\mathrm{div}}(\Omega)$, pak lze brát $\varepsilon=0$.

Dále pak

Lemma 3.5.2. *Nechť $\boldsymbol{u}$ je slabé řešení Navier–Stokesových rovnic odpovídající datům $\boldsymbol{u}_0$, $\boldsymbol{f}$ a $\boldsymbol{v}$ je slabé řešení (3.23) odpovídající týmž datům. Nechť jsou splněny předpoklady Věty 3.5.1.*

Potom $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{v}$ s.v. v $(0,T)\times\Omega$.

Zřejmě Lemma 3.5.1 a Lemma 3.5.2 implikují důkaz Věty 3.5.1. Připomeňme pouze (viz [8], [9], [24]), že pro případ $\Omega=\mathbf{R}^3$, $\Omega=\mathbf{R}^3_+$ nebo $\Omega\in C^2$ stačí předpokládat, že $\mathbf{u}\in L^\infty(0,T;(L^3(\Omega))^3)$. Důkaz uděláme pouze za předpokladu $s>3$, případ $s=3$ s dodatečným předpokladem malosti se dokazuje analogicky a je ponechán jako cvičení. Poznamenejme dále, že díky Větě 3.5.1 můžeme stejně jako ve dvou prostorových dimenzích dokázat plnou regularitu. Speciálně, pokud pravá strana a oblast Ω jsou C^∞, potom je také řešení C^∞, ale obecně ne až do času 0.

Důkaz (Lemmatu 3.5.1)**.** Existence řešení se dokazuje Galerkinovskou metodou. Vezměme si bázi tvořenou vlastními vektory Stokesova problému a slabé řešení konstruujeme jako v existenční větě pro Navier–Stokesovy rovnice. Zřejmě ukážeme ($\int_\Omega \left(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v}^k\right) \cdot \mathbf{v}^k \,\mathrm{d}x = 0!$), že

$$\left\|\mathbf{v}^k\right\|_{L^\infty(0,T;(L^2(\Omega))^3)} + \nu \left\|\nabla \mathbf{v}^k\right\|_{L^2(0,T;(L^2(\Omega))^{3\times 3})} \\ \leq C\left(\|\mathbf{f}\|_{L^2(0,T;(L^2(\Omega))^{3\times 3})}, \|\mathbf{u}_0\|_2\right).$$

Navíc, analogicky jak bylo ukázáno několikrát výše,

$$\left\|\frac{\partial \mathbf{v}^k}{\partial t}\right\|_{L^2(0,T;(W^{1,2}_{0,\mathrm{div}}(\Omega))^*)} \leq C\left(\|\mathbf{f}\|_{L^2(0,T;(L^2(\Omega))^3)}, \|\mathbf{u}_0\|_2\right).$$

Stejně jako pro případ dvou prostorových dimenzích použijeme jako testovací funkce $\frac{\partial \mathbf{v}^k}{\partial t}$ a $-P\Delta \mathbf{v}^k$ (tj. j-tou rovnici násobíme $\lambda_j c^k_j(t)$ resp. $\frac{\partial}{\partial t} c^k_j(t)$). Dostáváme (viz 2D)

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left\|\nabla \mathbf{v}^k\right\|_2^2 + \nu\left\|P\Delta \mathbf{v}^k\right\|_2^2 = \int_\Omega \left(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v}^k\right) \cdot P\Delta \mathbf{v}^k \,\mathrm{d}x - \int_\Omega P\Delta \mathbf{v}^k \cdot \mathbf{f} \,\mathrm{d}x$$
$$\frac{1}{2}\nu\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left\|\nabla \mathbf{v}^k\right\|_2^2 + \left\|\frac{\partial \mathbf{v}^k}{\partial t}\right\|_2^2 = -\int_\Omega \left(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v}^k\right) \cdot \frac{\partial \mathbf{v}^k}{\partial t} \,\mathrm{d}x + \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}^k}{\partial t} \,\mathrm{d}x.$$

Člen s $\mathbf{f}$ nečiní potíže, je třeba odhadnout konvektivní člen.

$$\int_\Omega \left(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v}^k\right) \cdot \mathbf{a} \,\mathrm{d}x \leq \|\mathbf{a}\|_2 \|\mathbf{u}\|_s \left\|\nabla \mathbf{v}^k\right\|_2^{\frac{s-3}{s}} \left\|\nabla \mathbf{v}^k\right\|_{1,2}^{\frac{3}{s}} \\ \leq \varepsilon \|\mathbf{a}\|_2^2 + \varepsilon \left\|P\Delta \mathbf{v}^k\right\|_2^2 + C(\varepsilon) \|\mathbf{u}\|_s^{\frac{2s}{s-3}} \left\|\nabla \mathbf{v}^k\right\|_2^2, \\ \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2s} + \frac{1}{q} = 1 \Longrightarrow q = \frac{2s}{s-3}\right).$$

Tedy

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left\|\nabla \mathbf{v}^k\right\|_2^2 + \nu\left\|P\Delta \mathbf{v}^k\right\|_2^2 + \left\|\frac{\partial \mathbf{v}^k}{\partial t}\right\|_2^2 \leq C_1 \|\mathbf{u}\|_s^{\frac{2s}{s-3}} \left\|\nabla \mathbf{v}^k\right\|_2^2 + C_2 \|\mathbf{f}\|_2^2.$$

Nyní stejně jako v případě dvou dimenzí odvodíme z Gronwallovy nerovnosti (násobíme seřezávací funkcí času), odhad pro $\nabla \mathbf{v}^k$, $P\Delta \mathbf{v}^k$ a $\frac{\partial \mathbf{v}^k}{\partial t}$ na (ε, T). Limitní přechod v rovnicích je jednoduchý, neboť máme silnější odhady než pro Navier–Stokesovy rovnice a jen lineární rovnici. Je-li $\mathbf{u}_0 \in W^{1,2}_{0,\mathrm{div}}(\Omega)$, pak lze brát $\varepsilon = 0$. ■

Důkaz (Lemmatu 3.5.2)**.** Vezměme $\varepsilon > 0$ pevné. Potom

$$\int_\varepsilon^t \int_\Omega \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \cdot \boldsymbol{\varphi}_1 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}\tau + \nu \int_\varepsilon^t \int_\Omega \nabla \mathbf{v} : \nabla \boldsymbol{\varphi}_1 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}\tau + \int_\varepsilon^t \int_\Omega (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v}) \cdot \boldsymbol{\varphi}_1 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}\tau \\ = \int_\varepsilon^t \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\varphi}_1 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}\tau \qquad \forall \boldsymbol{\varphi}_1 \in W^{1,2}_{0,\mathrm{div}}(\Omega). \tag{3.24}$$

Protože předpoklady na $\mathbf{u}$ zaručují, že $\mathbf{u} \in (L^4((0,T) \times \Omega))^3$, $\mathbf{u}$ splňuje energetickou rovnost, a proto

$$\frac{1}{2}\|\mathbf{u}(t)\|_2^2 - \frac{1}{2}\|\mathbf{u}(\varepsilon)\|_2^2 + \nu \int_\varepsilon^t \|\nabla \mathbf{u}\|_2^2 \,\mathrm{d}\tau = \int_\varepsilon^t \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}\tau. \tag{3.25}$$

Dále

$$\begin{aligned}
&\int_\varepsilon^t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\Big(\int_\Omega \mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\varphi}_2\,\mathrm{d}x\Big)\,\mathrm{d}\tau - \int_\varepsilon^t\int_\Omega \mathbf{u}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}_2}{\partial t}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau + \nu\int_\varepsilon^t\int_\Omega \nabla\mathbf{u}:\nabla\boldsymbol{\varphi}_2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau\\
&+\int_\varepsilon^t\int_\Omega (\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u})\cdot\boldsymbol{\varphi}_2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau = \int_\varepsilon^t\int_\Omega \mathbf{f}\cdot\boldsymbol{\varphi}_2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau \qquad (3.26)\\
&\forall\boldsymbol{\varphi}_2\in L^2(\varepsilon,T;W^{1,2}_{0,\mathrm{div}}(\Omega)\cap(W^{2,2}(\Omega))^3);\ \frac{\partial\boldsymbol{\varphi}_2}{\partial t}\in L^2(\varepsilon,T;(L^2(\Omega))^3).
\end{aligned}$$

Tedy volbou

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\varphi}_1 &:= \mathbf{v}-\mathbf{u},\\
\boldsymbol{\varphi}_2 &:= -\mathbf{v}
\end{aligned}$$

a sečtením (3.24) + (3.25) + (3.26) máme pro $\mathbf{w}:=\mathbf{u}-\mathbf{v}$

$$\frac{1}{2}\,\|\mathbf{w}(t)\|_2^2 + \nu\int_\varepsilon^t\int_\Omega |\nabla\mathbf{w}|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{2}\,\|\mathbf{w}(\varepsilon)\|_2^2$$

(neboť

$$\begin{aligned}
&\int_\varepsilon^t\int_\Omega [(\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{v})\cdot(\mathbf{v}-\mathbf{u}) - (\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u})\cdot\mathbf{v}]\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau\\
= &\int_\varepsilon^t\int_\Omega [\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{v}-\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}]\cdot(\mathbf{v}-\mathbf{u})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau = \int_\varepsilon^t\int_\Omega (\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{w})\cdot\mathbf{w}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau = 0
\end{aligned}$$

a člen má smysl!). Nyní pošleme $\varepsilon\to 0^+$. Protože $\mathbf{u}$ splňuje energetickou (ne)rovnost, je

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\|\mathbf{u}(\varepsilon)\|_2^2 = \|\mathbf{u}_0\|_2^2 .$$

Dále díky konstrukci máme ($\mathbf{v}$ splňuje energetickou rovnost v $(0,T)$)

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\|\mathbf{v}(\varepsilon)\|_2^2 = \|\mathbf{u}_0\|_2^2 .$$

Proto, použitím slabé spojitosti,

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\|\mathbf{u}(\varepsilon)-\mathbf{u}_0\|_2 = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\|\mathbf{v}(\varepsilon)-\mathbf{u}_0\|_2 = 0,$$

což dává

$$\lim_{t\to 0^+}\|(\mathbf{u}-\mathbf{v})(t)\|_2 = 0.$$

Tedy $\mathbf{w}=\mathbf{0}$ s.v. na $(0,T)\times\Omega$. ■

3.6 Lokální regularita ($N=3$)

Nechť $\mathbf{f}\in L^2(0,T;(L^2(\Omega))^3)$, $\mathbf{u}_0\in W^{1,2}_{0,\mathrm{div}}(\Omega)$. Ukažme, že $\exists T^*>0$ tak, že řešení Navier–Stokesových rovnic je z $L^\infty(0,T^*;W^{1,2}_{0,\mathrm{div}}(\Omega))\cap L^2(0,T^*;(W^{2,2}(\Omega))^3)$ a $\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}\in L^2(0,T^*;(L^2(\Omega))^3)$ (a totéž pro ∇p).

Věta 3.6.1. *Nechť $\Omega \subset \mathbf{R}^3$, $\Omega \in C^2$, $\boldsymbol{u}_0 \in W^{1,2}_{0,\mathrm{div}}(\Omega)$, $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{0}$ (pro jednoduchost).*
Potom $\exists T^* = T^*(\nu, \|\boldsymbol{u}_0\|_{1,2}, \Omega)$ tak, že na $(0, T^*)$ existuje právě jedno „regulární“ řešení Navier–Stokesových rovnic; speciálně $T^* \geq \frac{C\nu^3}{\|\nabla \boldsymbol{u}_0\|_2^4}$, $C = C(\Omega)$. Navíc $\exists G = G(\xi)$, $\xi > 0$ tak, že pro $\|\boldsymbol{u}_0\|_2 \leq G(\|\nabla \boldsymbol{u}_0\|_2)$, T^* může být libovolné kladné číslo. Pro Ω omezenou, $G = \frac{C\nu^2}{\|\nabla \boldsymbol{u}_0\|_2}$, $C = C(\Omega)$.

Poznámka. Větu lze interpretovat dvojím způsobem. Tvrzení platí, pokud buď je počáteční podmínka v $L^2(\Omega)$ dostatečně malá nebo viskozita ν je dostatečně velká.

Důkaz. a) „krátký čas“
Postupujeme jako při konstrukci Galerkinovou metodou v předchozí větě. Máme tedy

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left\|\nabla \mathbf{u}^k\right\|_2^2 + \nu \int_\Omega \left|P\Delta \mathbf{u}^k\right|^2 \,\mathrm{d}x = \int_\Omega \left(\mathbf{u}^k \cdot \nabla \mathbf{u}^k\right) P\Delta \mathbf{u}^k \,\mathrm{d}x.$$

Odhadněme konvektivní člen:

$$\begin{aligned}\left|\text{K.Č.}\right| &\leq \left\|\mathbf{u}^k\right\|_6 \left\|\nabla \mathbf{u}^k\right\|_3 \left\|P\Delta \mathbf{u}^k\right\|_2 \leq \widetilde{C}(\Omega) \left\|\nabla \mathbf{u}^k\right\|_2^{\frac{3}{2}} \left\|P\Delta \mathbf{u}^k\right\|_2^{\frac{3}{2}} \\ &\leq \frac{1}{2}\nu \left\|P\Delta \mathbf{u}^k\right\|_2^2 + \frac{C(\Omega)}{2}\nu^{-3}\left\|\nabla \mathbf{u}^k\right\|_2^6.\end{aligned}$$

Pokud položíme $y = \left\|\nabla \mathbf{u}^k\right\|_2^2$, máme

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{dt}} \leq \underbrace{C(\Omega)\nu^{-3}}_{K} y^3 \Longrightarrow \frac{1}{y^2} = -2Kt + \frac{1}{y_0^2} \Longrightarrow y^2 = \frac{y_0^2}{1 - 2Kty_0^2}.$$

Tedy řešení existuje, pokud

$$1 - 2KT^* y_0^2 > 0 \Longrightarrow T^* < \frac{1}{2Ky_0^2} = \frac{\nu^3}{2C(\Omega)\left\|\nabla \mathbf{u}_0\right\|_2^4}.$$

Testováním $\frac{\partial \mathbf{u}^k}{\partial t}$ a použitím odhadu na $\Delta \mathbf{u}^k$ dostaneme požadované odhady pro časovou derivaci.

b) „dlouhý čas“
Nyní odhadujme konvektivní člen poněkud jinak

$$\begin{aligned}&\left|\text{K.Č.}\right| \leq \left\|\mathbf{u}^k\right\|_3 \left\|\nabla \mathbf{u}^k\right\|_6 \left\|P\Delta \mathbf{u}^k\right\|_2 \leq C\left\|\mathbf{u}^k\right\|_2^{\frac{1}{2}} \left\|\nabla \mathbf{u}^k\right\|_2^{\frac{1}{2}} \left\|P\Delta \mathbf{u}^k\right\|_2^2, \\ &\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left\|\nabla \mathbf{u}^k\right\|_2^2 + \left(\nu - C(\Omega)\left\|\mathbf{u}^k\right\|_2^{\frac{1}{2}}\left\|\nabla \mathbf{u}^k\right\|_2^{\frac{1}{2}}\right)\left\|P\Delta \mathbf{u}^k\right\|_2^2 \leq 0.\end{aligned}$$

Je-li $\nu - C(\Omega)\left\|\mathbf{u}(t)\right\|_2^{\frac{1}{2}}\left\|\nabla \mathbf{u}(t)\right\|_2^{\frac{1}{2}} > 0$, pak

$$\left\|\nabla \mathbf{u}^k(t)\right\|_2 \leq \left\|\nabla \mathbf{u}_0\right\|_2.$$

Ale protože

$$\left\|\mathbf{u}^k(t)\right\|_2 \leq \left\|\mathbf{u}_0\right\|_2,$$

plyne z předpokladu

$$\nu - C(\Omega)\,\|\mathbf{u}_0\|_2^{\frac{1}{2}}\,\|\nabla\mathbf{u}_0\|_2^{\frac{1}{2}} > 0$$

nerovnost

$$\nu - C(\Omega)\,\left\|\mathbf{u}^k(t)\right\|_2^{\frac{1}{2}}\,\left\|\nabla\mathbf{u}^k(t)\right\|_2^{\frac{1}{2}} > 0 \qquad \forall t > 0.$$

Tím dostaneme hledané odhady pro $\nabla\mathbf{u}^k$ v $L^\infty(0,T;(L^2(\Omega))^{3\times3})$ a pro $\mathbf{u}^k$ v $L^2(0,T;(W^{2,2}(\Omega))^3)$. Odhad pro časovou derivaci se již dokáže lehce.

■

Poznámka. Je-li $\Omega \in C^\infty$, $\mathbf{u}_0 \in (C^\infty(\Omega))^3$, pak $\mathbf{u} \in C^\infty\left((0,T)\times\overline{\Omega}\right)$ (a stačí i $\mathbf{u}_0 \in W^{1,2}_{0,\mathrm{div}}(\Omega)$ pro lokální regularitu v čase). Ale nemůžeme z principu očekávat, že $\mathbf{u} \in C^\infty\left(\overline{\Omega}\times[0,T]\right)$. Proč?

$$\begin{aligned}
&\mathbf{u}|_{\partial\Omega\times(0,T)} = \mathbf{0},\ \text{ tedy nutně na } \partial\Omega\\
&\underbrace{\frac{\partial\mathbf{u}_0}{\partial t}}_{=0} + \underbrace{\mathbf{u}_0\cdot\nabla\mathbf{u}_0}_{=0} - \nu\Delta\mathbf{u}_0 + \nabla p(0,x) = \mathbf{f}(0,x).
\end{aligned}$$

Současně má platit

$$\begin{aligned}
\Delta p(0,x) &= \operatorname{div}\operatorname{div}(\mathbf{u}_0\otimes\mathbf{u}_0) - \operatorname{div}\mathbf{f}(0,x) && \text{v } \Omega,\\
\frac{\partial p(0,x)}{\partial\mathbf{n}} &= -\Delta\mathbf{u}_0\cdot\mathbf{n} + \mathbf{f}(0,x)\cdot\mathbf{n} && \text{na } \partial\Omega
\end{aligned}$$

a podmínka na $\partial\Omega$: $-\nu\Delta\mathbf{u}_0 + \nabla p(0,x) = \mathbf{f}(0,x)$ je obecně nadbytečná, tedy je třeba, aby byly navíc splněny nějaké podmínky kompatibility.

Poznámka. Nerovnost typu

$$\frac{1}{2}\,\|\mathbf{u}(t)\|_2^2 + \nu\int_\sigma^t \|\nabla\mathbf{u}\|_2^2\,\mathrm{d}\tau \le \frac{1}{2}\,\|\mathbf{u}(\sigma)\|_2^2$$

pro s.v. $\sigma \ge 0$, $\forall t \in [\sigma,T]$ se nazývá silná energetická nerovnost (naše byla pro $\sigma = 0$). Například pro omezené oblasti existuje řešení, které ji splňuje a mohli bychom to dokázat přímo použitím naší konstrukce, jen bychom museli být opatrnější v limitním přechodu k energetické nerovnosti. V takovém případě platí

Věta 3.6.2. *Nechť $\Omega \in C^\infty$, $\boldsymbol{u}$ je slabé řešení Navier–Stokesových rovnic odpovídající $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{0}$ a nechť $\boldsymbol{u}$ splňuje silnou energetickou nerovnost.*

Potom $\exists\mathcal{T}$ – sjednocení disjunktních časových intervalů tak, že

(a) $|(0,\infty)\setminus\mathcal{T}|_1 = 0 \quad \left(\mathcal{H}^{\frac{1}{2}}((0,\infty)\setminus\mathcal{T}) = 0\right)$,

(b) $\boldsymbol{u} \in (C^\infty(\mathcal{T}\times\overline{\Omega}))^3$,

(c) $\exists T^* \in (0,\infty) : (T^*,\infty) \subset \mathcal{T}$,

(d) *Pokud* $\boldsymbol{u}_0 \in W^{1,2}_{0,\mathrm{div}}(\Omega)$, *pak* $\exists T_1 > 0 : (0,T_1) \subset \mathcal{T}$.

Kapitola 4

Appendix: Řešitelnost úlohy $\operatorname{div} \mathbf{u} = f$

4.1 Integrální operátory

Dříve než přistoupíme k důkazu Lemmatu 2.3.2, připomeňme několik základních výsledků týkajících se integrálních operátorů.

Definice 4.1.1. *Nechť Ω je omezená oblast a nechť*

$$K(x, x-y) = \begin{cases} \dfrac{\Theta\big(x, \frac{x-y}{|x-y|}\big)}{|x-y|^{\lambda}}, & (x,y) \in \Omega \times \Omega, x \neq y, \\ 0, & \textit{jinak,} \end{cases}$$

kde $\Theta \in L^{\infty}(\Omega \times \partial B_1)$. Nechť $0 < \lambda < N$. Potom

$$T \colon f \mapsto \int_{\Omega} K(x, x-y) f(y) \, \mathrm{d}y$$

se nazývá slabě singulární operátor.

Platí (viz [30] nebo [10])

Věta 4.1.1. *Nechť $1 < q < \infty$, $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ je omezená oblast. Potom $T \colon L^q(\Omega) \to L^q(\Omega)$ a platí*

$$\|Tf\|_q \le C(N, \lambda, q) |\Omega|^{\frac{N-\lambda}{N}} \|\Theta\|_{L^{\infty}(\Omega \times \partial B_1)} \|f\|_q .$$

Definice 4.1.2. *Nechť*

$$K(x, z) = \frac{\Theta(x, \frac{z}{|z|})}{|z|^N},$$

kde $\Theta \in L^{\infty}(\mathbf{R}^N \times \partial B_1)$. Nechť

$$\int_{|z|=1} \Theta(x, z) \, \mathrm{d}S_z = 0 \qquad \forall x \in \mathbf{R}^N.$$

Potom

$$[Tf](x) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{|x-y| \ge \varepsilon} K(x, x-y) f(y) \, \mathrm{d}y$$

se nazývá singulární integrální operátor Calderón–Zygmundova typu, K je singulární jádro Calderón–Zygmundova typu.

Platí (viz [30])

Věta 4.1.2. *Nechť* $1 < q < \infty$ *a nechť* T *je singulární integrální operátor Calderón–Zygmundova typu. Potom* $T\colon L^q(\mathbf{R}^N) \to L^q(\mathbf{R}^N)$ *a*

$$\|[Tf]\|_q \le C(q,N)\|\Theta\|_{L^\infty(\mathbf{R}^N\times\partial B_1)}\|f\|_q.$$

4.2 Bogovského operátor v omezených oblastech

4.2.1 Homogenní okrajová podmínka

Studujeme úlohu

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\mathbf{v} &= f \qquad && \text{v } \Omega, \\ \mathbf{v} &= 0 && \text{na } \partial\Omega, \end{aligned}$$

kde Ω je omezená oblast. Protože předpokládáme, že $f \in L^q(\Omega)$ pro jisté $q > 1$ a Ω je dosti hladká, platí

$$\int_\Omega \operatorname{div}\mathbf{v}\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega}\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S = 0,$$

tedy

$$\int_\Omega f\,\mathrm{d}x = 0$$

je nutnou podmínkou řešitelnosti naší úlohy.

Označme

$$\overline{L^p(\Omega)} = \Big\{ f \in L^p(\Omega);\ \int_\Omega f\,\mathrm{d}x = 0 \Big\}.$$

Hlavním výsledkem je

Věta 4.2.1. *Nechť* $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ *je omezená oblast s lipschitzovskou oblastí. Potom existuje lineární operátor* $\mathcal{B}_\Omega = (\mathcal{B}^1_\Omega, \mathcal{B}^2_\Omega, \dots, \mathcal{B}^N_\Omega)$ *takový, že:*

(i)

$$\mathcal{B}_\Omega : \overline{L^p(\Omega)} \to (W^{1,p}_0(\Omega))^N, \quad 1 < p < \infty$$

(ii) Pro $f \in \overline{L^p(\Omega)}$

$$\operatorname{div}(\mathcal{B}_\Omega(f)) = f \qquad \textit{s.v. na } \Omega$$

(iii) $\exists C = C(p,N,\Omega)$*:* $\forall f \in \overline{L^p(\Omega)}$ *máme*

$$\|\nabla\mathcal{B}_\Omega(f)\|_p \le C\|f\|_p, \quad 1 < p < \infty$$

(iv) Je-li $f = \operatorname{div}\boldsymbol{g}$*,* $\boldsymbol{g} \in E^p_0(\Omega)$*, pak*

$$\|\mathcal{B}_\Omega(f)\|_p \le C(p,N,\Omega)\|\boldsymbol{g}\|_p, \quad 1 < p < \infty$$

(v) *Je-li* $f \in W_0^{m,p}(\Omega) \cap \overline{L^p(\Omega)}$, $m \geq 0$, *pak*

$$\|\nabla \mathcal{B}_\Omega(f)\|_{m,p} \leq C(p,N,\Omega)\|f\|_{m,p}, \quad 1 < p < \infty$$

(vi) *Je-li* $f \in C_0^\infty(\Omega)$ *(a samozřejmě* $\int_\Omega f \, \mathrm{d}x = 0$*), pak* $\mathcal{B}_\Omega(f) \in (C_0^\infty(\Omega))^N$.

Poznámka. Poznamenejme, že Lemma 2.3.2 je přímým důsledkem předchozí věty. Současně také uveďme, že z důkazu vyplyne, že operátor $\mathcal{B}_\Omega$ je lineární a nezávisí na p.

Místo Věty 4.2.1 dokážeme jiné tvrzení, kde předpoklad o lipschitzovskosti hranice nahradíme předpokladem, že Ω je hvězdicovitá vzhledem k jisté kouli B_R. Přesněji

Lemma 4.2.1. *Nechť* $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ *je hvězdicovitá vzhledem ke kouli* $B_R(x_0)$*, kde* $\overline{B_R(x_0)} \subset \Omega$. *Potom existuje lineární operátor*

$$\mathcal{B}_\Omega : \overline{C_0^\infty(\Omega)} = \{f \in C_0^\infty(\Omega); \int_\Omega f \, \mathrm{d}x = 0\} \to (C_0^\infty(\Omega))^N$$

takový, že

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathcal{B}_\Omega(f) &= f, & f &\in \overline{C_0^\infty(\Omega)} \\ \|\nabla \mathcal{B}_\Omega(f)\|_q &\leq C(q,N,\Omega)\|f\|_q, & 1 &< q < \infty. \end{aligned}$$

Navíc, je-li $f = \operatorname{div} \boldsymbol{g}$, $\boldsymbol{g} \in (C_0^\infty(\Omega))^N$, *pak*

$$\|\mathcal{B}_\Omega(f)\|_q \leq C(q,N,\Omega)\|\boldsymbol{g}\|_q, \quad 1 < q < \infty.$$

Konstanta C *má tvar*

$$C = C_0(q,N)\Big(\frac{\operatorname{diam}\Omega}{R}\Big)^N\Big(1 + \frac{\operatorname{diam}\Omega}{R}\Big),$$

kde $\operatorname{diam}\Omega = \sup_{x,y \in \Omega} |x - y|$.

Poznámka. Věta 4.2.1 plyne z Lemmatu 4.2.1 následovně. Použitím Lemmatu 2.3.1 rozložíme $\Omega \in C^{0,1}$ na konečný počet podoblastí, které jsou hvězdicovité vzhledem ke koulím, ležícím uvnitř těchto podoblastí. Funkci $f \in C_0^\infty(\Omega)$ s nulovým průměrem rozložíme na součet funkcí $f_i \in C_0^\infty(\Omega_i)$ s nulovým průměrem přes Ω_i a na každé množině Ω_i zkonstruujeme operátor $\mathcal{B}_{\Omega_i}$. Potom

$$\mathcal{B}_\Omega(f) = \sum_{i=1}^{r+m} \mathcal{B}_{\Omega_i}(f_i)$$

a díky Lemmatu 2.3.1 zůstanou odhady z Lemmatu 4.2.1 zachovány i na lipschitzovské oblasti. Nakonec využijeme hustotu hladkých funkcí s kompaktním nosičem v $L^q(\Omega)$ respektive v $E_0^p(\Omega)$. Analogicky, použitím hustoty těchto funkcí i v $W_0^{m,q}(\Omega)$ a mírné úpravě postupu z důkazu Lemmatu 4.2.1, se dokáže i odhad pro vyšší derivace, tedy

Lemma 4.2.2. *Nechť* $f \in W_0^{m,q}(\Omega) \cap \overline{L^q(\Omega)}$, *kde* $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ *je hvězdicovitá vzhledem ke kouli* $B_R(x_0)$, $\overline{B_R(x_0)} \subset \Omega$. *Potom operátor* $\mathcal{B}_\Omega$ *z Lemmatu 4.2.1 také splňuje*

$$\|\nabla \mathcal{B}_\Omega\|_{m,q} \leq C(q,N,\Omega)\|f\|_{m,q}, \quad m \in \mathbf{N}_0,\ 1 < q < \infty.$$

Důkaz. Důkaz proveďte sami tak, že modifikujete příslušná místa důkazu Lemmatu 4.2.1 níže. ■

Důkaz (Lemmatu 4.2.1)**.** Operátor div je invariantní na translace. Proto stačí uvažovat oblasti Ω, které jsou hvězdicovité vzhledem ke kouli $B_R(0)$ (se středem v počátku). Kandidátem na řešení je

$$\mathbf{v}(x) = \mathcal{B}_\Omega(f)(x) = \int_\Omega f(y)\frac{x-y}{|x-y|^N}\Big[\int_{|x-y|}^\infty \omega_R\Big(y + s\frac{x-y}{|x-y|}\Big)s^{N-1}\,\mathrm{d}s\Big]\,\mathrm{d}y, \tag{4.1}$$

kde

$$\omega_R(x) = \frac{1}{R^N}\omega\Big(\frac{x}{R}\Big),$$

a ω je standardní regularizační jádro, tj. $\omega \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$, $\operatorname{supp}\omega \subset \overline{B_1(0)}$ a

$$\int_{\mathbf{R}^N} \omega\,\mathrm{d}x = 1.$$

Potom $\operatorname{supp}\omega_R \subset \overline{B_R(0)}$, $\int_\Omega \omega_R\,\mathrm{d}x = 1$ a

$$\|\omega_R\|_{C^0(\mathbf{R}^N)} \le \frac{1}{R^N}\|\omega\|_{C^0(\mathbf{R}^N)}, \qquad \|\nabla\omega_R\|_{C^0(\mathbf{R}^N)} \le \frac{1}{R^{N+1}}\|\nabla\omega\|_{C^0(\mathbf{R}^N)}.$$

Přepišme (4.1) do několika ekvivalentních tvarů. Použitím substituce $r = \frac{s}{|x-y|}$ máme

$$\mathbf{v}(x) = \int_\Omega f(y)(x-y)\Big(\int_1^\infty \omega_R\big(y + r(x-y)\big)r^{N-1}\,\mathrm{d}r\Big)\,\mathrm{d}y \tag{4.2}$$

a použitím substituce $s = |x-y| + r$

$$\mathbf{v}(x) = \int_\Omega f(y)\frac{(x-y)}{|x-y|^N}\Big(\int_0^\infty \omega_R\Big(x + r\frac{x-y}{|x-y|}\Big)(|x-y|+r)^{N-1}\,\mathrm{d}r\Big)\,\mathrm{d}y. \tag{4.3}$$

Protože $f \in C_0^\infty(\Omega)$, je možno místo místo integrace přes Ω psát integrál přes $\mathbf{R}^N$. Substitucí $z = x - y$ v (4.2) máme

$$\mathbf{v}(x) = \int_{\mathbf{R}^N} f(x-z)z\Big(\int_1^\infty \omega_R(x - z + zr)r^{N-1}\,\mathrm{d}r\Big)\,\mathrm{d}z. \tag{4.4}$$

Pro důkaz lemmatu můžeme použít kterékoliv z výše uvedených ekvivaletních vyjádření. Z tvaru (4.4) derivací integrálu podle parametru plyne, že $\mathcal{B}_\Omega(f) \in (C^\infty(\Omega))^N$. Ukažme, že $\operatorname{supp}\mathcal{B}_\Omega(f) \subset A$, kde

$$A = \{z \in \Omega; z = \lambda z_1 + (1-\lambda)z_2, z_1 \in \operatorname{supp} f, z_2 \in \overline{B_R(0)}, \lambda \in [0,1]\}.$$

(Uvědomme si, že Ω je hvězdicovitá vzhledem ke všem bodům z_2 a tudíž celá spojnice bodů (z_1, z_2) leží v Ω.) Nechť $x \in \Omega \setminus A$. Potom $y + r(x-y) \notin \overline{B_R(0)}$ pro $r \ge 1$, $y \in \operatorname{supp} f$, neboť pro $w = y + r(x-y)$ je $x = y(1-\frac{1}{r}) + w\frac{1}{r}$. Proto je $\mathcal{B}_\Omega(f)(x) = 0$ pro $x \in \Omega \setminus A$. Protože A je kompaktní množina, dokázali jsme, že $\mathcal{B}_\Omega(f) \in (C_0^\infty(\Omega))^N$.

Počítejme nyní derivace.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial v_j(x)}{\partial x_i} &= \int_{\mathbf{R}^N} \frac{\partial f(x-z)}{\partial x_i} z_j \Big(\int_1^\infty \omega_R(x-z+zr) r^{N-1}\,\mathrm{d}r \Big)\,\mathrm{d}z \\
&+ \int_{\mathbf{R}^N} f(x-z) z_j \Big(\int_1^\infty \frac{\partial \omega_R}{\partial x_i}(x-z+rz) r^{N-1}\,\mathrm{d}r \Big)\,\mathrm{d}z \\
&= \int_{B_\varepsilon(0)} \Big\{ \frac{\partial f(x-z)}{\partial x_i} z_j \Big(\int_1^\infty \omega_R(x-z+zr) r^{N-1}\,\mathrm{d}r \Big) \\
&\quad + f(x-z) z_j \Big(\int_1^\infty \frac{\partial \omega_R}{\partial x_i}(x-z+rz) r^{N-1}\,\mathrm{d}r \Big) \Big\}\,\mathrm{d}z \\
&+ \int_{B^\varepsilon(0)} f(x-z) \Big\{ \delta_{ij} \Big(\int_1^\infty \omega_R(x-z+zr) r^{N-1}\,\mathrm{d}r \Big) \\
&\quad + z_j \Big(\int_1^\infty \frac{\partial \omega_R}{\partial x_i}(x-z+rz) r^{N}\,\mathrm{d}r \Big) \Big\}\,\mathrm{d}z \\
&+ \int_{\partial B_\varepsilon(0)} f(x-z) z_j \frac{z_i}{|z|} \Big(\int_1^\infty \omega_R(x-z+zr) r^{N-1}\,\mathrm{d}r \Big)\,\mathrm{d}S_z \\
&= (I_\varepsilon^1)_{ij}(x) + (I_\varepsilon^2)_{ij}(x) + (I_\varepsilon^3)_{ij}(x).
\end{aligned}
$$

Zřejmě

$$
\lim_{\varepsilon \to 0^+} (I_\varepsilon^1)_{ij} = 0.
$$

Ve druhém integrálu provedeme substituci $y = x - z$ a poté analogické substituce jako při přechodu od tvaru (4.1) ke tvaru (4.3):

$$
\begin{gathered}
(I_\varepsilon^2)_{ij}(x) = \\
\int_{B^\varepsilon(x)} \Big[f(y) \frac{\delta_{ij}}{|x-y|^N} \Big(\int_0^\infty \omega_R\Big(x + r\frac{x-y}{|x-y|}\Big) (|x-y|+r)^{N-1}\,\mathrm{d}r \Big) \Big]\,\mathrm{d}y + \\
\int_{B^\varepsilon(x)} \Big[f(y) \frac{x_j - y_j}{|x-y|^{N+1}} \Big(\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial \xi_i} \omega_R\Big(x + r\frac{x-y}{|x-y|}\Big) (|x-y|+r)^{N}\,\mathrm{d}r \Big) \Big]\,\mathrm{d}y.
\end{gathered}
$$

Výraz $(|x-y|+r)^N$ resp. analogický člen v první integrálu přepíšeme pomocí binomické věty. Člen bez $|x-y|$ ponecháme zvlášť. Protože

$$
0 < r < (R + \operatorname{diam}\Omega) \le 2 \operatorname{diam}\Omega, \qquad |x-y| < \operatorname{diam}\Omega,
$$

lze odhadnout

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial \xi_i} \omega_R\Big(x + r\frac{x-y}{|x-y|}\Big) r^{N-k} |x-y|^{k-1}\,\mathrm{d}r &\le C \max_{x \in B_R} |\nabla \omega_R| (\operatorname{diam}\Omega)^N, \\
\int_0^\infty \omega_R\Big(x + r\frac{x-y}{|x-y|}\Big) r^{N-1-k} |x-y|^{k-1}\,\mathrm{d}r &\le C \max_{x \in B_R} |\omega_R| (\operatorname{diam}\Omega)^{N-1}.
\end{aligned}
$$

Celkem tedy

$$
(I_\varepsilon^2)_{ij} = \int_{B^\varepsilon(x)} K_{ij}(x, x-y) f(y)\,\mathrm{d}y + \int_{B^\varepsilon(x)} G_{ij}(x,y) f(y)\,\mathrm{d}y,
$$

kde $K_{ij}(x,z) = \frac{\Theta_{ij}(x, \frac{z}{|z|})}{|z|^N}$ s

$$
\Theta_{ij}\Big(x, \frac{z}{|z|}\Big) = \delta_{ij} \int_0^\infty \omega_R\Big(x + r\frac{z}{|z|}\Big) r^{N-1}\,\mathrm{d}r + \frac{z_j}{|z|} \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial \xi_i} \omega_R\Big(x + r\frac{z}{|z|}\Big) r^N\,\mathrm{d}r
$$

a

$$|G_{ij}(x,y)| \le \frac{C(N)}{|x-y|^{N-1}} \frac{(\operatorname{diam}\Omega)^{N-1}}{R^N}\Big(1+\frac{\operatorname{diam}\Omega}{R}\Big), \tag{4.5}$$

$x, y \in \Omega$.

Třetí integrál můžeme přepsat

$$\begin{aligned} &(I_\varepsilon^3)_{ij}(x) \\ = \quad & \int_{\partial B_\varepsilon(0)} (f(x-z)-f(x)) z_j \frac{z_i}{|z|}\Big(\int_1^\infty \omega_R(x-z+rz) r^{N-1}\,\mathrm{d}r\Big)\,\mathrm{d}S_z \\ & + f(x)\int_{\partial B_\varepsilon(0)} z_j \frac{z_i}{|z|}\Big(\int_1^\infty \omega_R(x-z+rz) r^{N-1}\,\mathrm{d}r\Big)\,\mathrm{d}S_z. \end{aligned}$$

Nejprve se podívejme na druhý integrál. Substitucí $z = \varepsilon w$

$$\begin{aligned} {}_2(I_\varepsilon^3)_{ij} &= f(x)\varepsilon^N \int_{\partial B_1(0)} w_j w_i \Big(\int_1^\infty \omega_R(x-\varepsilon w + r\varepsilon w) r^{N-1}\,\mathrm{d}r\Big)\,\mathrm{d}S_w \\ [\varepsilon(r-1)=t] &= f(x)\varepsilon^{N-1}\int_{\partial B_1(0)} w_j w_i \Big(\int_0^\infty \omega_R(x+tw)\Big(\frac{t}{\varepsilon}+1\Big)^{N-1}\mathrm{d}t\Big)\,\mathrm{d}S_w \\ &= f(x)\int_{\mathbf{R}^N} \frac{w_i w_j}{|w|^2}\omega_R(x+w)\,\mathrm{d}w + o(1) \qquad \text{pro } \varepsilon \to 0^+. \end{aligned}$$

Protože první integrál obsahuje dodatečný člen jdoucí k nule ($|f(x-z) - f(x)| \le C|z| \to 0$ pro $\varepsilon \to 0^+$), máme

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} (I_\varepsilon^3)_{ij}(x) = f(x) H_{ij}(x),$$

kde

$$H_{ij}(x) = \int_{\mathbf{R}^N} \frac{w_i w_j}{|w|^2}\omega_R(x+w)\,\mathrm{d}w.$$

Celkem tedy

$$\frac{\partial v_j(x)}{\partial x_i} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{B^\varepsilon(x)} K_{ij}(x,x-y) f(y)\,\mathrm{d}y + \int_{\mathbf{R}^N} G_{ij}(x,y) f(y)\,\mathrm{d}y + f(x)H_{ij}(x),$$

$x \in \Omega$. Protože

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\Big[\omega_R\Big(x+r\frac{x-y}{|x-y|}\Big)(|x-y|+r)^N\Big] &= \frac{x_k-y_k}{|x-y|}\frac{\partial}{\partial \xi_k}\omega_R\Big(x+r\frac{x-y}{|x-y|}\Big)\times \\ &\times (|x-y|+r)^N + N\omega_R\Big(x+r\frac{x-y}{|x-y|}\Big)(|x-y|+r)^{N-1}, \end{aligned}$$

dostáváme

$$\begin{aligned} &(I_\varepsilon^2)_{ii}(x) \\ = \quad & \int_{B^\varepsilon(x)} \frac{f(y)}{|x-y|^N}\Big(\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\Big[\omega_R\Big(x+r\frac{x-y}{|x-y|}\Big)(|x-y|+r)^N\Big]\,\mathrm{d}r\Big)\,\mathrm{d}y \\ = \quad & -\omega_R(x)\int_{B^\varepsilon(x)} f(y)\,\mathrm{d}y \xrightarrow[\varepsilon\to 0^+]{} -\omega_R(x)\int_\Omega f(y)\,\mathrm{d}y = 0. \end{aligned}$$

Dále

$$H_{ii}(x) = \int_{\mathbf{R}^N} \omega_R(x+w)\,\mathrm{d}w = 1,$$

a proto

$$\operatorname{div}\mathbf{v}(x) = f(x), \qquad x \in \Omega.$$

Zbývají dokázat odhady. Díky (4.5) je G_{ij} slabě singulární jádro a díky Větě 4.1.1 ($|\Omega|^{\frac{1}{N}} \le \operatorname{diam}\Omega$)

$$\begin{aligned}\Big\| \int_{\mathbf{R}^N} G_{ij}(\cdot,y) f(y)\,\mathrm{d}y \Big\|_q &\le \Big\| \int_{\Omega} G_{ij}(\cdot,y) f(y)\,\mathrm{d}y \Big\|_q \\ &\le C(q,N)\Big(\frac{\operatorname{diam}\Omega}{R}\Big)^N \Big(1+\frac{\operatorname{diam}\Omega}{R}\Big)\|f\|_q.\end{aligned}$$

Potom

$$\begin{aligned}& \int_{|z|=1} \Theta_{ij}(x,z)\,\mathrm{d}S_z \\ = & \int_{|z|=1} \Big(\delta_{ij}\int_0^\infty \omega_R(x+zr)r^{N-1}\,\mathrm{d}r + z_j \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial \xi_i}\omega_R(x+rz)r^N\,\mathrm{d}r\Big)\,\mathrm{d}S_z \\ & = \int_{\mathbf{R}^N} \Big[\delta_{ij}\omega_R(x+y) + y_j \frac{\partial}{\partial y_i}\omega_R(x+y)\Big]\,\mathrm{d}y = 0.\end{aligned}$$

Dále, analogicky jako při odhadech slabě singulárního jádra,

$$\sup_{x,z\in\mathbf{R}^N} \Big|\Theta\Big(x,\frac{z}{|z|}\Big)\Big| \le C(N)\|\omega\|_{C^1(\mathbf{R}^N)}\Big(\frac{\operatorname{diam}\Omega}{R}\Big)^N\Big(1+\frac{\operatorname{diam}\Omega}{R}\Big),$$

a proto

$$\begin{aligned}& \lim_{\varepsilon\to 0^+} \Big\| \int_{B^\varepsilon(\cdot)} K_{ij}(\cdot,\cdot-y) f(y)\,\mathrm{d}y \Big\|_q \\ \le \quad & C(q,N,\omega)\Big(\frac{\operatorname{diam}\Omega}{R}\Big)^N\Big(1+\frac{\operatorname{diam}\Omega}{R}\Big)\|f\|_q.\end{aligned}$$

Poslední člen

$$\sup_{x\in\Omega}|H_{ij}(x)| = \sup_{x\in\Omega}\int_{\mathbf{R}^N} \frac{w_i w_j}{|w|^2}\omega_R(x+w)\,\mathrm{d}w \le \int_{\mathbf{R}^N}\omega_R(y)\,\mathrm{d}y = 1,$$

a tudíž je odhad

$$\|\nabla \mathcal{B}_\Omega(f)\|_q \le c_0(q,N)\Big(\frac{\operatorname{diam}\Omega}{R}\Big)^N\Big(1+\frac{\operatorname{diam}\Omega}{R}\Big)\|f\|_q$$

dokázán.

Zbývá dokázat odhad pro $f = \operatorname{div}\mathbf{g}$, $\mathbf{g} \in (C_0^\infty(\Omega))^N$. Dosaďme za f do vztahu (4.4). Máme

$$
\begin{aligned}
v_j(x) = \quad & \int_{B_\varepsilon(0)} \operatorname{div}_x \mathbf{g}(x-z) z_j \Big(\int_1^\infty \omega_R(x-z+rz) r^{N-1} \, \mathrm{d}r \Big) \, \mathrm{d}z \\
& + \int_{B^\varepsilon(0)} \operatorname{div}_x \mathbf{g}(x-z) z_j \Big(\int_1^\infty \omega_R(x-z+rz) r^{N-1} \, \mathrm{d}r \Big) \, \mathrm{d}z \\
= \quad & \int_{B_\varepsilon(0)} \operatorname{div}_x \mathbf{g}(x-z) z_j \Big(\int_1^\infty \omega_R(x-z+rz) r^{N-1} \, \mathrm{d}r \Big) \, \mathrm{d}z \\
& \quad + \int_{B^\varepsilon(0)} \mathbf{g}(x-z) \Big[\delta_{ij} \int_1^\infty \omega_R(x-z+rz) r^{N-1} \, \mathrm{d}r \\
& \quad + z_j \int_1^\infty \frac{\partial}{\partial \xi_i} \omega_R(x-z+rz)(r-1) r^{N-1} \, \mathrm{d}r \Big] \, \mathrm{d}z \\
& + \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \Big(g_i(x-z) z_j \frac{z_i}{|z|} \int_1^\infty \omega_R(x-z+rz) r^{N-1} \, \mathrm{d}r \Big) \, \mathrm{d}S_z \\
= \quad & (J_\varepsilon^1)_{ij}(x) + (J_\varepsilon^2)_{ij}(x) + (J_\varepsilon^3)_{ij}(x), \quad \varepsilon > 0.
\end{aligned}
$$

Stejně jako výše se tedy dostáváme k

$$
v_j(x) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{B^\varepsilon(x)} K_{ij}(x, x-y) g_i(y) \, \mathrm{d}y + \int_{\mathbf{R}^N} \widetilde{G}_{ij}(x,y) g_i(y) \, \mathrm{d}y + H_{ij}(x) g_i(x),
$$

$x \in \Omega$, kde K_{ij} je stejné jako výše, $\widetilde{G}_{ij}$ je slabě singulární jádro, splňující stejný odhad jako G_{ij}. Proto dostáváme stejný odhad jako v předchozím případě. ■

Poznámka. V našem případě, tj. pro omezenou oblast, můžeme pro $p < N$ dokázat i odhady

$$
\|\mathbf{v}\|_{\frac{Np}{N-p}} \le C \|f\|_p, \qquad 1 < p < N,
$$

tedy (pro $p \ge N$ použitím Friedrichsovy nerovnosti)

$$
\|\mathbf{v}\|_{1,p} \le C \|f\|_p, \qquad 1 < p < \infty.
$$

Ovšem konstanta C závisí na Ω přes konstantu z Friedrichsovy nerovnosti resp. z vnoření $L^{\frac{Np}{N-p}}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$.

4.2.2 Nehomogenní okrajová podmínka

Řešíme úlohu

$$
\begin{aligned}
\operatorname{div} \mathbf{u} &= f \quad \text{v } \Omega, \\
\mathbf{u} &= \mathbf{a} \quad \text{na } \partial\Omega
\end{aligned}
\tag{4.6}
$$

s podmínkou

$$
\int_\Omega f \, \mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}S.
$$

Věta 4.2.2. *Nechť $\Omega \in C^{0,1}$ je omezená oblast. Potom existuje lineární operátor $\widetilde{\mathcal{B}}_\Omega = (\widetilde{\mathcal{B}}_\Omega^1, \widetilde{\mathcal{B}}_\Omega^2, \ldots, \widetilde{\mathcal{B}}_\Omega^N)$ takový, že pro $f \in L^p(\Omega)$, $\boldsymbol{a} \in (W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega))^N$, splňující podmínku kompatibility*

$$
\int_\Omega f \, \mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}S
$$

platí

$$\operatorname{div} \widetilde{\mathcal{B}}_\Omega(f, \boldsymbol{a}) = f \quad \textit{s.v. na } \Omega, \qquad T(\widetilde{\mathcal{B}}_\Omega(f, \boldsymbol{a})) = \boldsymbol{a},$$

kde T je operátor stop. Navíc existuje konstanta C, závislá pouze na dimenzi N, exponentu p a oblasti Ω tak, že

$$\|\widetilde{\mathcal{B}}_\Omega(f, \boldsymbol{a})\|_{1,p} \le C(N, p, \Omega)\big(\|f\|_p + \|\boldsymbol{a}\|_{1-\frac{1}{p},p,\partial\Omega}\big), \quad 1 < p < \infty.$$

Důkaz. Označme $\mathbf{A}$ rozšíření $\mathbf{a}$ do $(W^{1,p}(\Omega))^N$ podle inverzní věty o stopách, tj. $\mathrm{T}\,\mathbf{A} = \mathbf{a}$, $\|\mathbf{A}\|_{1,p,\Omega} \le C(p, N, \Omega)\|\mathbf{a}\|_{1-\frac{1}{p},p,\partial\Omega}$. Položme

$$\mathbf{v} = \widetilde{\mathcal{B}}_\Omega(f, \mathbf{a}) = \mathcal{B}_\Omega(f - \operatorname{div} \mathbf{A}) + \mathbf{A},$$

tedy řešení hledáme ve tvaru $\mathbf{v} = \mathbf{w} + \mathbf{A}$, kde $\operatorname{div} \mathbf{w} = f - \operatorname{div} \mathbf{A}$, $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ na $\partial\Omega$. Zřejmě

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = f, \qquad \mathrm{T}\,\mathbf{v} = \mathrm{T}\,\mathbf{A} = \mathbf{a}$$

a platí

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}\|_{1,p} &\le C(p, N, \Omega)\big(\|\mathbf{A}\|_{1,p,\Omega} + \|f - \operatorname{div} \mathbf{A}\|_{p,\Omega}\big) \\ &\le C(p, N, \Omega)\big(\|f\|_p + \|\mathbf{a}\|_{1-\frac{1}{p},p,\partial\Omega}\big). \end{aligned}$$

■

Připomeňme, že pro nehomogenní okrajovou podmínku plyne nutnost alespoň lipschitzovské hranice z toho, aby stopa funkce byla dobře definována. Pro homogenní okrajovou podmínku je také jistá regularita nutná. Následující konstrukce pochází od Luca Tartara a ukazuje, že pro případ nehladké hranice obecně řešení nemusí existovat a to dokonce i v případě $p = 2$.

Uvažujme $\Omega \subset \mathbf{R}^2$, jejíž hranice je tvořena parabolami $y = x^2$ resp. $y = -x^2$, $0 < x < 1$ a obloukem kružnice $y^2 + (x-1)^2 = 1$, $1 \le x \le 2$. Nechť $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ je řešením

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = f,$$

kde $f \in \overline{L^2(\Omega)}$. Ukažme, že obecně nemusí být $|\nabla \mathbf{u}|$ v $L^2(\Omega)$. Předpokládejme, že tomu tak je, a budeme se snažit dospět ke sporu. Položme

$$g(x) = \int_{-x^2}^{x^2} \Big(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y}\Big)\,\mathrm{d}y = \int_{-x^2}^{x^2} \frac{\partial u_1}{\partial x}(x, y)\,\mathrm{d}y,$$

protože $u_2 \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Dále definujme pro s.v. $x \in (0, 1)$

$$A(x) = \int_{-x^2}^{x^2} u_1(x, y)\,\mathrm{d}y.$$

Potom, díky tomu, že $u_1 \in W_0^{1,2}(\Omega)$,

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} A(x) &= \int_{-x^2}^{x^2} \frac{\partial}{\partial x} u_1(x, y)\,\mathrm{d}y + 2x(u_1(x, x^2) + u_1(x, -x^2)) \\ &= \int_{-x^2}^{x^2} \frac{\partial}{\partial x} u_1(x, y)\,\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Proto $g(x) = A'(x)$. Ale $A(0) = 0$, tedy

$$A(x) = \int_0^x g(s)\,\mathrm{d}s. \tag{4.7}$$

Dále, díky tomu, že $u_1(x,-x^2)=0$ pro s.v. $x\in(0,1)$,

$$u_1(x,y)=\int_{-x^2}^{y}\frac{\partial}{\partial\tau}u_1(x,\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

Proto použitím Fubiniho věty

$$\begin{aligned}A(x)= & \int_{-x^2}^{x^2}\Big(\int_{-x^2}^{y}\frac{\partial}{\partial\tau}u_1(x,\tau)\,\mathrm{d}\tau\Big)\,\mathrm{d}y=\int_{-x^2}^{x^2}\Big(\int_{\tau}^{x^2}\frac{\partial}{\partial\tau}u_1(x,\tau)\,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}\tau\\ = & \int_{-x^2}^{x^2}(x^2-\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}u_1(x,\tau)\,\mathrm{d}\tau,\end{aligned}$$

a tedy

$$|A(x)|\le\frac{2^{3/2}}{3^{1/2}}x^3\Big(\int_{-x^2}^{x^2}\Big(\frac{\partial u_1}{\partial y}(x,y)\Big)^2\,\mathrm{d}y\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Proto

$$\frac{A(x)}{x^3}\in L^2(0,1),$$

neboť

$$\int_0^1\Big(\frac{A(x)}{x^3}\Big)^2\,\mathrm{d}x\le\frac{8}{3}\int_0^1\int_{-x^2}^{x^2}\Big(\frac{\partial u_1}{\partial y}(x,y)\Big)^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

a $u_1\in W^{1,2}(\Omega)$.

Vezměme nyní $f(x)=x^\alpha$, $x\in(0,1)$, prodlouženo na Ω takovým způsobem, aby $\int_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0$. Protože $f\in L^2(\Omega)$, speciálně musí platit

$$\int_0^1\int_{-x^2}^{x^2}x^{2\alpha}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x<\infty,$$

tj.

$$\int_0^1 x^{2\alpha+2}\,\mathrm{d}x<\infty,$$

a tedy $2\alpha+2>-1$. Proto naše f patří do $L^2(\Omega)$ právě tehdy, když je $\alpha>-\frac{3}{2}$.

Na druhou stranu

$$g(x)=-\int_{-x^2}^{x^2}\operatorname{div}\mathbf{u}(x,y)\,\mathrm{d}y=\int_{-x^2}^{x^2}f(x,y)\,\mathrm{d}y=2x^{\alpha+2}$$

pro $x\in(0,1)$. Proto vzhledem k (4.7)

$$A(x)=\int_0^x 2y^{\alpha+2}\,\mathrm{d}y=\frac{2}{\alpha+3}x^{\alpha+3},$$

pokud $\alpha>-3$, což je splněno díky požadavkům na f. Podmínka $\frac{A(x)}{x^3}\in L^2(0,1)$ dává

$$x^\alpha\in L^2(0,1),$$

což je splněno pro $\alpha>-\frac{1}{2}$ a to je silnější požadavek než podmínka plynoucí z předpokladu $f\in L^2(\Omega)$ (tj. $\alpha>-\frac{3}{2}$). To znamená, že podmínka $f\in\overline{L^2(\Omega)}$ není dostačující proto, aby existovalo $\mathbf{u}\in(W_0^{1,2}(\Omega))^2$ řešící naší úlohu.

4.3 Neomezené oblasti

Označme pro $1 \leq p < \infty$

$$D_0^{1,p}(\Omega) = \overline{\{u \in C_0^\infty(\Omega)\}}^{\|\nabla \cdot\|_p}.$$

Poznamenejme, že pro Ω omezenou dostáváme prostor $W_0^{1,p}(\Omega)$, tedy netriviální případ dostáváme pouze pro Ω neomezenou. Pro $1 \leq p < N$ a $\partial\Omega \in C^{0,1}$ (pokud je neprázdná) je

$$D_0^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^1_{loc}(\Omega); \nabla u \in (L^p(\Omega))^N; u \in L^{\frac{Np}{N-p}}(\Omega); \mathrm{T}\, u|_{\partial\Omega} = 0\}.$$

Je-li $p \geq N$, potom

$$D_0^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p_{loc}(\Omega); \nabla u \in (L^p(\Omega))^N; \mathrm{T}\, u|_{\partial\Omega} = 0\}.$$

Pro $\Omega = \mathbf{R}^N$, $p \geq N$ je

$$D_0^{1,p}(\mathbf{R}^N) = \{u = \{\tilde{u} + C\}_{C \in \mathbf{R}}; \tilde{u} \in L^p_{loc}(\mathbf{R}^N); \nabla \tilde{u} \in (L^p(\mathbf{R}^N))^N\}.$$

4.3.1 Celý prostor

V tomto případě je řešení úlohy $\operatorname{div} \mathbf{u} = f$ obzvláště jednoduché. Lze totiž hledat řešení ve tvaru $\mathbf{u} = \nabla\psi$, tj.

$$\Delta\psi = f \qquad \text{v } \mathbf{R}^N,$$

a tedy

$$\mathcal{B}_{\mathbf{R}^N}(f) = \nabla\mathcal{E} * f,$$

kde $\mathcal{E}$ je fundamentální řešení Laplaceovy rovnice.

Máme (důkaz je zřejmý a je ponechán jako užitečné cvičení)

Věta 4.3.1. *Operátor $\mathcal{B}_{\mathbf{R}^N}\colon L^p(\mathbf{R}^N) \to (D_0^{1,p}(\mathbf{R}^N))^N$, $1 < p < \infty$. Pro $f \in L^p(\mathbf{R}^N)$ platí*

$$\operatorname{div} \mathcal{B}_{\mathbf{R}^N}(f) = f \qquad \textit{s.v. na } \mathbf{R}^N$$

a

$$\|\nabla\mathcal{B}_{\mathbf{R}^N}(f)\|_p \leq C(p,N)\|f\|_p, \quad 1 < p < \infty.$$

Je-li $f \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$, potom $\mathcal{B}_{\mathbf{R}^N}(f) \in (C^\infty(\mathbf{R}^N))^N$ a

$$|\mathcal{B}_{\mathbf{R}^N}(f)|(x) \leq \frac{C(p,N,R)}{|x|^{N-1}}$$

pro všechna $x \in B^R(0)$, $R > 0$.

4.3.2 Vnější oblasti

Věta 4.3.2. *Nechť Ω je vnější oblast s lipschitzovskou hranicí. Potom existuje lineární operátor $\mathcal{B}_\Omega = (\mathcal{B}^1_\Omega, \mathcal{B}^2_\Omega, \dots, \mathcal{B}^N_\Omega)$ takový, že*

(i) $\mathcal{B}_\Omega\colon L^p(\Omega) \to (D_0^{1,p}(\Omega))^N$, $1 < p < \infty$

(ii) $\operatorname{div} \mathcal{B}_\Omega(f) = f$ *s.v. v* Ω, $f \in L^p(\Omega)$

(iii) $\|\nabla \mathcal{B}_\Omega(f)\|_p \leq C(p,\Omega)\|f\|_p$, $1 < p < \infty$

(iv) Je-li $f \in C_0^\infty(\Omega)$, *pak* $\mathcal{B}_\Omega(f) \in (C^\infty(\Omega))^N$ *a* $|\mathcal{B}_\Omega(f)|(x) \leq \frac{C(p,N,R)}{|x|^{N-1}}$ *pro* $x \in B^R(0)$, $R > R_0$ *takové, že* $\Omega^c \subset B_{R_0}(0)$.

Důkaz. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $f \in C_0^\infty(\Omega)$, tj. použijeme větu o hustotě. Prodlužme f nulou tak, že $f \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$. Položme

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w},$$

kde

$$\mathbf{u} = \left\{ \begin{array}{rl} \nabla\mathcal{E} * f, & 1 < p < N \\ \nabla\mathcal{E} * f - \dfrac{1}{|\Omega_{R_0}|}\displaystyle\int_{\Omega_{R_0}} \nabla\mathcal{E} * f \, \mathrm{d}x, & N \leq p < \infty \end{array} \right\} \in (D_0^{1,p}(\mathbf{R}))^N,$$

tj. $\operatorname{div}\mathbf{u} = f$ na $\mathbf{R}^N$. Proto $\operatorname{div}\mathbf{w} = 0$ na Ω a je třeba zvolit $\mathbf{w}$ tak, aby vyeliminovalo nenulovou podmínku $\mathbf{u}$ na $\partial\Omega$. Tedy

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\mathbf{w} = 0 &\quad \text{na } \Omega_{R_0} = \Omega \cap B_{R_0}(0), \\ \mathbf{w} = -\mathbf{u} &\quad \text{na } \partial\Omega, \\ \mathbf{w} = \mathbf{0} &\quad \text{na } \partial B_{R_0}(0). \end{aligned}$$

Protože

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{u}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S + \int_{\partial B_{R_0}} 0\,\mathrm{d}S = -\int_{\partial\Omega^c} \mathbf{u}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S = -\int_{\Omega^c} \operatorname{div}\mathbf{u}\,\mathrm{d}x = 0,$$

je splněna podmínka kompatibility a tudíž $\mathbf{w}$ existuje dle Věty 4.2.2. Dodefinujme $\mathbf{w}$ nulou vně $B_{R_0}(0)$. Máme tedy splněno (ii), (iv) a zbývá dokázat odhady. Zřejmě

$$\|\nabla\mathbf{u}\|_{p,\mathbf{R}^N} \leq C\|f\|_p.$$

Dále, díky Poincarého nerovnosti,

$$\begin{aligned} \|\nabla\mathbf{w}\|_{p,\mathbf{R}^N} &\leq \|\nabla\mathbf{w}\|_{p,\Omega_{R_0}} \leq C(p,N,\Omega_{R_0})\|\mathrm{T}\,\mathbf{u}\|_{1-\frac{1}{p},p,\partial\Omega} \\ &\leq C\|\mathbf{u}\|_{1,p,\Omega_{R_0}} \leq C\|\nabla\mathbf{u}\|_{p,\Omega_{R_0}} \leq C\|f\|_p. \end{aligned}$$

■

4.3.3 Oblasti s nekompaktní hranicí

Uvažujme oblast

$$\Omega = \{x \in \mathbf{R}^N; x^N > F(x_1,\ldots,x_{N-1}) = F(x')\},$$

kde F je *globálně* lipschitzovská funkce. Bez újmy na obecnosti předpokládejme $F(\mathbf{0}) = 0$. Jako příklad uveďme

$$\Omega = \{x \in \mathbf{R}^N; x^N > (|x'|+1)^\alpha - 1\}, \quad \alpha \leq 1.$$

Tedy oblast Ω obsahuje uvnitř nějaký kužel. Označme pro jisté $M > 0$

$$C_\vartheta^+ = \{x \in \mathbf{R}^N; x_N > M|x'|\}.$$

Díky předpokladům výše oblast Ω takový kužel pro jisté M uvnitř obsahuje. Platí (věta je převzata z [29])

Věta 4.3.3 (Solonnikov). *Nechť Ω je oblast typu výše. Potom existuje operátor $\mathcal{B}_\Omega = (\mathcal{B}_\Omega^1, \mathcal{B}_\Omega^2, \dots, \mathcal{B}_\Omega^N)$ takový, že*

(i) $\mathcal{B}_\Omega : L^p(\Omega) \to (D_0^{1,p}(\Omega))^N$, $1 < p < \infty$

(ii) $\operatorname{div} \mathcal{B}_\Omega(f) = f$ *s.v. v* Ω, $f \in L^p(\Omega)$

(iii) $\|\nabla \mathcal{B}_\Omega(f)\|_p \le C(p,N)\|f\|_p$, $1 < p < \infty$

(iv) Je-li $f \in C_0^\infty(\Omega)$, *pak* $\mathcal{B}_\Omega(f) \in (C^\infty(\Omega))^N$ *a* $|\mathcal{B}_\Omega(f)|(x) \le \frac{C(p,N,\Omega)}{|x|^{N-1}}$ *pro* $x \in \Omega^R$, $R > 0$.

Důkaz. Položme $C_x = C^-_{x,\vartheta} = \{y \in \mathbf{R}^N; y - x \in C^-_{0,\vartheta} = -C^+_{0,\vartheta}\}$. Potom $C_x \subset \mathbf{R}^N \setminus \Omega$. Nechť $f \in C_0^\infty(\Omega)$. Prodlužme f nulou vně Ω a položme

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(x) = \mathcal{B}_\Omega(f)(x) &= \int_{C_x} \frac{x-y}{|x-y|^N}\omega\Big(\frac{x-y}{|x-y|}\Big) f(y)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{C^+_{0,\vartheta}} \frac{z}{|z|^N}\omega\Big(\frac{z}{|z|}\Big) f(x-z)\,\mathrm{d}z, \end{aligned}$$

kde $\omega \in C_0^1(\partial B_1(0) \cap C^+_{0,\vartheta})$, $\int_{\partial B_1(0)} \omega \,\mathrm{d}S = 1$.

Zbytek je analogický jako dříve a je ponechán pro zájemce jako zajímavé cvičení. ■

4.3.4 Aplikace

Pokud chceme dokázat hustotu hladkých funkcí s nulovou divergencí a s kompaktním nosičem ve $W^{1,p}_{0,\mathrm{div}}(\Omega)$, je případ, kdy Ω je vnější oblast, podstatně komplikovanější než případ, kdy je Ω omezená oblast. Ukažme důkaz pro případ $\Omega = \mathbf{R}^N$, kdy všechny těžkosti způsobené tím, že oblast je neomezená, se projeví, ušetříme si pouze problémy kolem hranice, které jsme ovšem řešili v případě omezené oblasti dříve.

Nechť tedy $\mathbf{u} \in W^{1,p}_{0,\mathrm{div}}(\mathbf{R}^N)$. Vezměme $R \gg 1$ a položme $\mathbf{u}_R = \mathbf{u}\eta_R$, kde η_R je seřezávací funkce taková, že

$$\eta_R(x) = \begin{cases} 1 & x \in B_R(0), \\ 0 & x \in B^{2R}(0), \end{cases}$$

$0 \le \eta_R \le 1$, $\nabla \eta_R \le \frac{C}{R}$. Zřejmě $\lim_{R\to\infty} \mathbf{u}_R = \mathbf{u}$ ve $(W^{1,p}(\mathbf{R}^N))^N$. Funkce u_R má již kompaktní nosič, nemá ale nulovou divergenci. Proto položíme

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{v}_R = \operatorname{div} \mathbf{u}_R \qquad & \text{na } B_{2R}(0) \setminus B_R(0), \\ \mathbf{v}_R|_{\partial B_R(0)} = \mathbf{v}_R|_{\partial B_{2R}(0)} = \mathbf{0}. & \end{aligned}$$

Zřejmě řešení existuje a splňuje

$$\|\nabla \mathbf{v}_R\|_{p, B_{2R}(0)\setminus B_R(0)} \le C\|\operatorname{div} \mathbf{u}_R\|_{p, B_{2R}(0)\setminus B_R(0)},$$

kde C nezávisí na R. Proto

$$\|\nabla \mathbf{v}_R\|_{p, B_{2R}(0)\setminus B_R(0)} \le C\|\mathbf{u}\cdot\nabla\eta_R\|_{p, B_{2R}(0)\setminus B_R(0)} \le \frac{C}{R}\|\mathbf{u}\|_{p, B_{2R}(0)\setminus B_R(0)}.$$

Díky Poincarého nerovnosti také platí

$$\|\mathbf{v}_R\|_{p,B_{2R}(0)\setminus B_R(0)} \le CR\|\nabla\mathbf{v}_R\|_{p,B_{2R}(0)\setminus B_R(0)} \le C\|\mathbf{u}\|_{p,B_{2R}(0)\setminus B_R(0)}.$$

Položme $\mathbf{w}_R = \mathbf{u}_R - \mathbf{v}_R$. Potom $\mathbf{w}_R$ má kompaktní nosič $(B_{2R}(0))$, splňuje

$$\operatorname{div}\mathbf{w}_R = \operatorname{div}\mathbf{u}_R - \operatorname{div}\mathbf{v}_R = 0$$

v $\mathbf{R}^N$ a platí

$$\begin{aligned}\|\mathbf{w}_R - \mathbf{u}\|_{1,p,\mathbf{R}^N} &\le \|\mathbf{u}(1-\eta_R)\|_{1,p,B_{2R}(0)\setminus B_R(0)} + \|\mathbf{v}_R\|_{1,p,B_{2R}(0)\setminus B_R(0)} \\ &\le C\|\mathbf{u}\|_{1,p,B_{2R}(0)\setminus B_R(0)} \to 0\end{aligned}$$

pro $R \to +\infty$. Nyní stačí vzít regularizaci

$$\mathbf{w}_{R,n} = \omega_{\frac{1}{n}} * \mathbf{w}_R.$$

Pro vhodnou posloupnost $R_n \to +\infty$ máme $\mathbf{w}_{R_n,n} \in (C_0^\infty(\mathbf{R}^N))^N$, $\operatorname{div}\mathbf{w}_{R_n,n} = 0$ (regularizace komutuje s divergencí) a

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{w}_{R_n,n} = \mathbf{u}$$

ve $(W^{1,p}(\mathbf{R}^N))^N$.

Literatura

[1] R.A. Adams: **Sobolev Spaces**, Boston, MA, Academic Press, 1975.

[2] H. Brezis: **Analyse Fonctionelle. Théorie et Applications**, Masson et C$^{\text{ie}}$, 1983.

[3] T. Buckmaster, V. Vicol: *Nonuniqueness of weak solutions to the Navier–Stokes equation*, Ann. of Math. **189** (2019) 101–144.

[4] M. Bulíček et al.: *Moderní teorie PDR*, učební elektronický text MFF UK, `http://www.karlin.mff.cuni.cz/~pokorny/moderni_teorie.pdf`

[5] L. Caffarelli, R. Kohn, L. Nirenberg: *Partial regularity of suitable weak solutions of the Navier–Stokes equations*, Commun. Pure Appl. Math. **35** (1982) 771–831.

[6] A. Cheskidov, S. Friedlander, R. Shvydkoy: *On the energy equality and weak solutions of the 3D Navier–Stokes equations*, in: Advances in mathematical fluid mechanics, 171–175, Springer, Berlin, 2010.

[7] C. De Lellis, L. Székelyhidi Jr.: *On admissibility criteria for weak solutions of the Euler equations*, Arch. Ration. Mech. Anal. **195** (2010) 225–260.

[8] L. Escauriaza, G.A. Seregin, V. Šverák: *$L_{3,\infty}$-solutions of Navier–Stokes equations and backward uniqueness* (rusky), Uspekhi Mat. Nauk **58**, No. 2 (2003) 3–44; anglický překlad: Russian Math. Surveys **58**, No. 2 (2003) 211–250.

[9] L. Escauriaza, G.A. Seregin, V. Šverák: *Backward uniqueness for the heat operator in half-space* (rusky), Algebra i Analiz **15**, No. 1 (2003) 201–214; anglický překlad: St. Petersburg Math. J. **15**, No. 1 (2004) 139–148.

[10] G.P. Galdi: **An Introduction to the Mathematical Theory of the Navier–Stokes Equations I**, Springer Tracts in Natural Philosophy, Vol. **38**, Springer Verlag, New York, 1994.

[11] G.P. Galdi: *An introduction to the Navier–Stokes initial-boundary value problem*, Galdi, Giovanni P. (ed.) et al., **Fundamental directions in mathematical fluid mechanics**, Basel: Birkhäuser, 1–70, 2000.

[12] Y. Giga, H. Sohr: *Abstract L^p Estimates for the Cauchy Problem with Applications to the Navier–Stokes Equations in Exterior Domains*, J. Funct. Anal. **102**, No. 1 (1991) 72–94.

[13] J. Guillod, V. Šverák: *Numerical investigations of non-uniqueness for the Navier–Stokes initial value problem in borderline spaces*, arXiv:1704.00560.

[14] E. Hopf: *Über die Anfangswertaufgabe für die Hydrodynamischen Gleichungen*, Math. Nachrichten **4** (1951) 213–231.

[15] H. Jia, V. Šverák: *Are the incompressible 3d Navier–Stokes equations locally ill-posed in the natural energy space?* J. Funct. Anal. **268** (2015) 3734–3766.

[16] H. Koch, V.A. Solonnikov: *L_p-estimates for a solution to the nonstationary Stokes equations. Function theory and phase transitions*, J. Math. Sci. (New York) **106**, No. 3 (2001) 3042–3072.

[17] A. Kufner, O. John, S. Fučík: **Function spaces**, Academia, Prague, 1977.

[18] O.A. Ladyženskaja: **The mathematical theory of viscous incompressible flow**, New York–London–Paris: Gordon and Breach Science Publishers, 1969.

[19] J. Leray: *Étude de diverses équations intégrales non linéaires et de quelques problemes de l'hydrodynamique*, Journ. de Math. **12**, No. 2 (1933) 1–82.

[20] J. Leray: *Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace*, Acta Math., **63** (1934) 193–248.

[21] J.-L. Lions: **Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires**, Etudes mathematiques, Paris: Dunod; Paris: Gauthier-Villars, 1969.

[22] P.-L. Lions: **Mathematical Topics in Fluid Mechanics, Volume I: Incompressible Models**, Clarendon Press, Oxford, 1996.

[23] J. Málek, J. Nečas, M. Pokorný, M.E. Schonbek: *On possible singular solutions to the Navier–Stokes equations*, Math. Nachr. **199** (1999) 97–114.

[24] A.S. Michailov, T.N. Shilkin: *$L_{3,\infty}$-solutions to the 3D-Navier–Stokes system in the domain with a curved boundary* (rusky), Zap. Nauchn. Sem. S.-Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI) **336** (2006), Kraev. Zadachi Mat. Fiz. i Smezh. Vopr. Teor. Funkts. **37**, 133–152, 276; anglický překlad: J. Math. Sci. (N. Y.) **143**, No. 2 (2007) 2924–2935.

[25] J. Nečas, M. Růžička, V. Šverák: *On self–similar solutions of the Navier–Stokes equations*, Acta Math. **176** (1997) 283–294.

[26] A. Novotný, I. Straškraba: **Mathematical Theory of Compressible Flows**, Oxford Science Publications, 2004.

[27] C.W. Oseen: **Neuere Methoden in der Hydrodynamik.** Leipzig, Akad. Verlagsgesellschaft M.B.H., 1927.

[28] J. Simon: *On the existence of the pressure for solutions of the variational Navier–Stokes equations*, J. Math. Fluid Mech. **1**, No. 3 (1999) 225–234.

[29] V.A. Solonnikov: *On the solvability of boundary and initial-boundary value problems for the Navier–Stokes system in domains with noncompact boundaries*, Pacific J. Math. **93** (1981) 443–458.

[30] E.M. Stein: **Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions**, Princeton University Press, 1970.

[31] R. Temam: **Navier–Stokes equations. Theory and numerical analysis**, Providence, RI: American Mathematical Society (AMS), 2001.

[32] R. Temam: **Problèmes mathématiques en plasticité**, Méthodes Mathématiques de l'Informatique 12, Gauthier-Villars, Montrouge, 1983.

[33] T.P. Tsai: *On Leray's self-similar solutions of the Navier–Stokes equations satisfying local energy estimates*, Arch. Rational Mech. Anal. **143**, No. 1 (1998) 29–51.