PŘÍKLAD 1

$$x' = x - y$$
$$y' = x + y + e^t \sin t$$

ŘEŠENÍ

$$\left(\begin{array}{cc|c} \lambda-1 & 1 & 0 \\ -1 & \lambda-1 & e^t \sin t \end{array}\right) \underset{\text{II}-(\lambda-1)\text{I}}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} \lambda-1 & 1 & 0 \\ -\lambda^2+2\lambda-2 & 0 & e^t \sin t \end{array}\right)$$

2. rovnice: $-x'' + 2x' - 2x = e^t \sin t$

char. polynom: $-\xi^2 + 2\xi - 2$, kořeny $\xi_{1,2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{-2} = 1 \pm i$.

$FS = \{e^t \cos t, e^t \sin t\}$

$x_h(t) = \alpha e^t \cos t + \beta e^t \sin t \qquad \alpha, \beta, t \in \mathbb{R}$

pravá strana má spec. tvar: $e^t \sin t = e^{1.t}\left(0.\cos(1.t) + 1.\sin(1.t)\right)$

obecný tvar: $e^{\mu t}\left(P(t)\cos(\nu t) + Q(t)\sin(\nu t)\right)$,

zde tedy $\mu = 1$, $\nu = 1$, $P = 0$, $Q = 1$, $\mu + \nu i = 1 + i$ je kořen náš. 1 $\Rightarrow m = 1$

podle věty o part. řešení rovnice se spec. pravou stranou (V18.9) ∃ x_p tvaru

$$x_p(t) = t^m e^{\mu t}\left(R(t)\cos(\nu t) + S(t)\sin(\nu t)\right),$$ tedy

$$x_p(t) = te^t(c_1\cos t + c_2\sin t)$$

$$x_p'(t) = e^t(c_1\cos t + c_2\sin t) + te^t(c_1\cos t + c_2\sin t) + te^t(-c_1\sin t + c_2\cos t)$$

$$= e^t\cos t\,(c_1 + c_1 t + c_2 t) + e^t\sin t\,(c_2 + c_2 t - c_1 t)$$

$$x_p''(t) = e^t\cos t\,(c_1 + c_1 t + c_2 t) - e^t\sin t\,(c_1 + c_1 t + c_2 t) + e^t\cos t\,(c_1 + c_2)$$

$$+ e^t\sin t\,(c_2 + c_2 t - c_1 t) + e^t\cos t\,(c_2 + c_2 t - c_1 t) + e^t\sin t\,(c_2 - c_1)$$

$$= e^t\cos t\left(c_1 + c_1 t + c_2 t + c_1 + c_2 + c_2 + c_2 t - c_1 t\right) +$$

$$+ e^t\sin t\left(c_2 + c_2 t - c_1 t - c_1 - c_1 t - c_2 t + c_2 - c_1\right)$$

$$= e^t\cos t\,(2c_1 + 2c_2 + 2c_2 t) + e^t\sin t\,(2c_2 - 2c_1 - 2c_1 t).$$

Dosaď: $\quad -x_p''(t)+2x_p'(t)-2x_p(t) = e^t\cos t\,(-2c_1-2c_2-2c_2t+2c_1+2c_1t+2c_2t-2c_1t)$

$$+\,e^t\sin t\,(-2c_2+2c_1+2c_1t+2c_2+2c_2t-2c_1t-2c_2t)$$

$$=e^t\cos t\,(-2c_2)+e^t\sin t\,(2c_1).$$

Tedy $\quad -2c_2e^t\cos t+2c_1e^t\sin t=e^t\sin t \quad\Rightarrow\quad c_1=\frac{1}{2},\ c_2=0.$

$$x(t)=x_p(t)+x_h(t)=\frac{1}{2}te^t\cos t+\alpha e^t\cos t+\beta e^t\sin t,\quad \alpha,\beta,t\in\mathbb{R}.$$

1. rovnice: $\quad y=-x'+x=$

$$=-\frac{1}{2}\left(e^t\cos t+te^t\cos t-te^t\sin t\right)-\alpha e^t\cos t+\alpha e^t\sin t-\beta e^t\sin t-\beta e^t\cos t$$

$$+\frac{1}{2}te^t\cos t+\alpha e^t\cos t+\beta e^t\sin t$$

$$=e^t\cos t\left(-\frac{1}{2}-\frac{t}{2}-\alpha-\beta+\frac{t}{2}+\alpha\right)+e^t\sin t\left(\frac{t}{2}+\alpha-\beta+\beta\right)$$

$$=e^t\cos t\left(-\beta-\frac{1}{2}\right)+e^t\sin t\left(\alpha+\frac{t}{2}\right).$$

Řešení:
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{t}\cos t\left(\frac{t}{2}+\alpha\right) + e^{t}\sin t\cdot\beta \\ e^{t}\cos t\left(-\beta-\frac{1}{2}\right) + e^{t}\sin t\left(\alpha+\frac{t}{2}\right) \end{pmatrix}, \quad \alpha,\beta\in\mathbb{R},\ t\in\mathbb{R}.$$