Věta 23.15 (Diniovo kritérium). Nechť $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$, $t \in \mathbb{R}$, $s \in \mathbb{C}$ a $\exists \delta > 0$ takové, že $\displaystyle\int_0^\delta \frac{f(t+\tau)+f(t-\tau)-2s}{\tau}\,d\tau$ konverguje.

Potom $s^f(t) = s$.

Důkaz. Předp. $\delta \in (0,\pi)$. Podle Lemmatu 23.3 platí pro $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$s_n^f(t) - s = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \big(f(t-\tau)-s\big) D_n(\tau)\,d\tau = \frac{1}{2\pi}\Big(\underbrace{\int_{-\pi}^{0}}_{\text{subst. } \tau \mapsto -\tau} + \int_0^{\pi}\Big)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\big(f(t+\tau)+f(t-\tau)-2s\big) D_n(\tau)\,d\tau$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{f(t+\tau)+f(t-\tau)-2s}{\sin \tau/2} \sin\big((n+\tfrac{1}{2})\tau\big)\,d\tau = \frac{1}{2\pi}\Big(\int_0^{\delta} + \int_\delta^{\pi}\Big)$$

$$=: I + II.$$

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_0^\delta \frac{f(t+\tau)+f(t-\tau)-2s}{\sin\frac{\tau}{2}} \cdot \sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\tau\right) d\tau$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^\delta \frac{f(t+\tau)+f(t-\tau)-2s}{\tau} \cdot \frac{\tau}{\sin\frac{\tau}{2}} \cdot \sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\tau\right) d\tau$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^\delta \underbrace{\underbrace{\frac{f(t+\tau)+f(t-\tau)-2s}{\tau}}_{\in L^1(0,\delta)} \cdot \underbrace{\frac{\tau}{\sin\frac{\tau}{2}}}_{\substack{\text{omezená} \\ (\in L^\infty(0,\delta))}}}_{\in L^1(0,\delta)} \cdot \frac{e^{i\frac{\pi}{2}} e^{in\tau} - e^{-i\frac{\pi}{2}} \cdot e^{-in\tau}}{2i} \, d\tau$$

$$\left| e^{i\frac{\pi}{2}} \right| = 1, \quad \left| e^{-i\frac{\pi}{2}} \right| = 1,$$

tedy (R-L lemma) $\lim\limits_{n\to\infty} I = 0$. Obdobně $\lim\limits_{n\to\infty} II = 0$.

(Věta 23.8)

$\square$

Věta 23.16 (důsledky Diniova kritéria). Nechť $f \in P_{2\pi}$, $t \in \mathbb{R}$.

(POSLEDNÍ!)

(a) Jestliže $\exists$ vlastní $f(t+)$ a $f(t-)$ a vlastní

$$\lim_{\tau \to t-} \frac{f(\tau) - f(t-)}{\tau - t} \quad \text{a} \quad \lim_{\tau \to t+} \frac{f(\tau) - f(t+)}{\tau - t},$$

potom $S^f(t) = \dfrac{f(t+) + f(t-)}{2}$. Speciálně, jestliže $\exists$ vlastní $f_+'(t)$ a $f_-'(t)$, potom $S^f(t) = f(t)$.

(b) Jestliže existují $\alpha > 0$, $K > 0$ a $\delta > 0$ takové, že

$$\forall \tau \in (-\delta, \delta) : \ |f(t+\tau) - f(t)| \leq K |\tau|^\alpha,$$

potom $S^f(t) = f(t)$.

Důkaz. (a) Nalezneme $\delta > 0$ takové, že

$$\tau \longmapsto \frac{f(t+\tau)-f(t+)}{\tau}, \quad \tau \longmapsto \frac{f(t-\tau)-f(t-)}{\tau}$$

jsou omezené na $(0,\delta)$. Označme $s = \dfrac{f(t+)+f(t-)}{2}$. Potom je

funkce $$\tau \longmapsto \frac{f(t+\tau)+f(t-\tau)-2s}{\tau} = \frac{f(t+\tau)-f(t+)}{\tau} + \frac{f(t-\tau)-f(t-)}{\tau}$$

omezená, a tím spíše integrovatelná na $(0,\delta)$. Tvrzení plyne z Věty 23.15.

$\left(L^\infty(0,\delta) \hookrightarrow L^1(0,\delta) \right)$.

(b) Položme $s = f(t)$. Potom $\forall \tau \in (0,\delta)$ platí

$$\frac{|f(t+\tau)+f(t-\tau)-2s|}{\tau} \leq \frac{|f(t+\tau)-f(t)|}{\tau} + \frac{|f(t-\tau)-f(t)|}{\tau} \leq 2K\tau^{\alpha-1}.$$

Protože $\int_0^\delta \tau^{\alpha-1} d\tau$ konverguje, konverguje i $\int_0^\delta \frac{|f(t+\tau)+f(t-\tau)-2s|}{\tau} d\tau$. Tvrzení opět plyne z Věty 23.15. $\square$

Poznámka (ke konvergenci Fourierových řad).

(i) $\exists f \in \mathcal{P}_{2\pi}$: s^f diverguje $\forall t \in \mathbb{R}$,

(ii) $\exists f \in \mathcal{P}_{2\pi}$ spojitá: s^f diverguje v bodech nespočetné husté podmnožiny $\mathbb{R}$

(iii) f mon. (nebo $BV([0,2\pi])$), pak $s^f(t) = \dfrac{f(t+) + f(t-)}{2}$

(iv) $f \in L^2(0,2\pi) \implies \| s_n^f - f \|_{L^2(0,2\pi)} \to 0$

(v) $f \in L^2(0,2\pi) \implies s_n^f \to f$ skoro všude na $\mathbb{R}$