23.3. BODOVÁ KONVERGENCE FOURIEROVÝCH ŘAD

$f \in \mathcal{P}_{2\pi}$

IDEA: věty „tauberovského typu"

(c) reg. metoda:

$\sum a_n = s \implies (c) \sum a_n = s$

$\not\Leftarrow$

$\Longleftarrow$ & podmínka (?)

„věta": $(c) \sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$ & (NĚCO) $\implies \sum a_n = s$

IDEA: Hardyova (tauberovská) věta

$(c) \sum a_n = s$ & $\exists K \in \mathbb{R}\ \forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}: |k \cdot a_k| \leq K \implies \sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$

($\sum (-1)^n$ to nesplňuje)

Věta 23.12 (Hardy). Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost komplexních čísel a $s \in \mathbb{C}$. Nechť $\exists K \in \mathbb{R}$ takové, že $\forall k \in \mathbb{N}: |k a_k| \leq K$. Jestliže $(c)\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$, potom $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$.

Důkaz. Pro $n \in \mathbb{N}$ označme $s_n = a_0 + \dots + a_n$, $\sigma_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} s_k$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $\lambda > 1$ takové, že $K(\lambda - 1) < \varepsilon$. Potom $\sum_{k=n+1}^{[\lambda n]} |a_k| \leq \frac{K}{n}(\lambda n - n) = K(\lambda - 1)$.

Platí $([\lambda n]+1)\sigma_{[\lambda n]} - (n+1)\sigma_n = s_{n+1} + \dots + s_{[\lambda n]} =$

$= ([\lambda n] - n) s_n + ([\lambda n] - n) a_{n+1} + ([\lambda n] - n - 1) a_{n+2} + \dots + a_{[\lambda n]}$.

Potom $([\lambda n] - n)(s_n - \sigma_n) = ([\lambda n]+1)\sigma_{[\lambda n]} - (n+1)\sigma_n - \sum_{k=n+1}^{[\lambda n]} ([\lambda n] + 1 - k) a_k -$

$- ([\lambda n] - n)\sigma_n = ([\lambda n]+1)\sigma_{[\lambda n]} - ([\lambda n]+1)\sigma_n - \sum_{k=n+1}^{[\lambda n]} ([\lambda n] + 1 - k) a_k$.

Zvolme $n_0 \in \mathbb{N}$ splňující $(\lambda - 1) n_0 - 1 > 0$. Potom pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí

$$s_n - \tilde{\sigma}_n = \frac{[\lambda n]+1}{[\lambda n]-n}\left(\sigma_{[\lambda n]} - \sigma_n\right) - \frac{1}{[\lambda n]-n} \sum_{k=n+1}^{[\lambda n]} \left([\lambda n]+1-k\right) a_k .$$

Tedy

$$|s_n - \tilde{\sigma}_n| \leq \frac{\lambda n + 2}{(\lambda-1)n-1}\left(|\sigma_{[\lambda n]} - s| + |\sigma_n - s|\right) + \frac{\lambda n + 1 - n}{[\lambda n]-n} \sum_{k=n+1}^{[\lambda n]} a_k$$

$$\leq \underbrace{\frac{\lambda n + 2}{(\lambda-1)n-1}}_{\to \lambda/(\lambda-1)}\left(\underbrace{|\sigma_{[\lambda n]} - s|}_{\to 0} + \underbrace{|\sigma_n - s|}_{\to 0}\right) + \underbrace{\frac{(\lambda-1)n-1}{(\lambda-1)n-1}}_{\to 1} K(\lambda-1),$$

Odtud plyne: $\limsup\limits_{n\to\infty} |s_n - \tilde{\sigma}_n| \leq \frac{\lambda}{\lambda-1}\cdot 0 + 1 . K(\lambda-1) < \varepsilon .$

Tedy $\lim\limits_{n\to\infty} |s_n - \tilde{\sigma}_n| = 0$. Tudíž $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$, tj. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = s$.

$\square$

POZNÁMKA. „stejnoměrná" verse Hardyovy věty: $\{a_n\}$ posl. funkcí, $a_n : M \to \mathbb{C}$, $M \subset \mathbb{R}$, $\exists K \in \mathbb{R}\ \forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\ \forall t \in M : |k a_k(t)| \leq K$.

Jestliže (c) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \rightrightarrows s$ na M, kde $s : M \to \mathbb{C}$, potom $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \rightrightarrows s$ na M.

Věta 23.13 (omezená variace a Fourierovy koeficienty). Nechť f je 2π-periodická funkce a $f \in BV([0, 2\pi])$. Potom

$$\exists K \in \mathbb{R}\ \forall k \in \mathbb{Z} : |k \cdot \hat{f}(k)| \leq K.$$

Důkaz. Víme: $\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} \, dt$, $n \in \mathbb{Z}$.

Substitucí $s = t - \frac{\pi}{n}$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, dostaneme

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{n}}^{2\pi-\frac{\pi}{n}} f\left(s+\frac{\pi}{n}\right) e^{-ins+i\pi}\,ds = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(s+\frac{\pi}{n}\right)e^{-ins}\,ds.$$ Tedy

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\left(f(t)-f\left(t+\frac{\pi}{n}\right)\right)e^{-int}\,dt,$$ tj. $$|\hat{f}(n)| \leq \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\left|f\left(t+\frac{\pi}{n}\right)-f(t)\right|dt.$$

Dále $\displaystyle\int_0^{2\pi}\left|f\left(t+k\frac{\pi}{n}\right)-f\left(t+(k-1)\frac{\pi}{n}\right)\right|dt = \int_0^{2\pi}\left|f\left(t+\frac{\pi}{n}\right)-f(t)\right|dt$ $\forall k\in\mathbb{Z}$. Tedy

$$|\hat{f}(n)| \leq \frac{1}{8\pi n}\sum_{k=1}^{2|n|}\int_0^{2\pi}\left|f\left(t+k\frac{\pi}{n}\right)-f\left(t+(k-1)\frac{\pi}{n}\right)\right|dt$$

$$= \frac{1}{8\pi n}\int_0^{2\pi}\sum_{k=1}^{2|n|}\left|f\left(t+k\frac{\pi}{n}\right)-f\left(t+(k-1)\frac{\pi}{n}\right)\right|dt \leq \frac{1}{8\pi n}\int_0^{2\pi}V(f;0,2\pi)\,dt$$

$$= \frac{V(f;0,2\pi)}{4n}. \quad \square$$

Věta 23.14 (Jordanovo–Dirichletovo kritérium). Nechť $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$ a $f \in BV([0,2\pi])$.

(a) Potom $\forall t \in \mathbb{R}$ $\exists$ vlastní $f(t-)$ a $f(t+)$ a $s^f(t) = \dfrac{f(t+)+f(t-)}{2}$.

(b) Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a<b$, a f je spojitá na (a,b). Potom

$$s_n^f \overset{loc}{\rightrightarrows} f \text{ na } (a,b).$$

Důkaz. (a) BÚNO f reálná. Potom $f = f_1 - f_2$, $f_1, f_2 \uparrow$. Tedy $\exists$ vlastní $f(t+)$, $f(t-)$. Dle Věty 23.5 víme, že $\sigma_n^f \to \dfrac{f(t+)+f(t-)}{2}$. Podle Věty 23.13 platí $|k\hat{f}(k)| \leq K$. Tedy dle Věty 23.12 platí

$$s_n^f(t) \to \frac{f(t+)+f(t-)}{2}.$$

(b) Totéž, stejnoměrná verse. $\square$