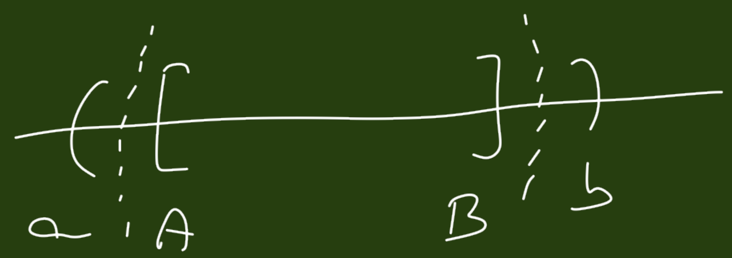
Důkaz V 23.5 (b) (a,b), f spoj. na (a,b) $\Rightarrow$ $\sigma_n^f \overset{loc}{\rightrightarrows} f$ na (a,b)



Zvolme A, B : $a<A<B<b$. Nalezneme $\omega \in (0,\pi)$ takové, že $[A-\omega, B+\omega] \subset (a,b)$. Označme

$$M = \sup\{|f(t)|;\ t \in [A,B]\}.$$

Ze spojitosti f na $[A,B]$ máme, že $M \in \mathbb{R}$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Ze stejnoměrné spojitosti f na $[A-\omega, B+\omega]$ nalezneme $\delta \in (0,\omega)$ takové, že

$$\forall t \in [A,B]\ \forall \tau \in (-\delta,\delta): \quad |f(t+\tau) - f(t)| < \varepsilon.$$

K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0\ \forall t \in [\delta, 2\pi - \delta]$ platí $K_n(t) < \varepsilon$.

Potom $\forall t \in [A,B]$ $\forall n \geq n_0$ platí

$$|\sigma_n^f(t) - f(t)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \big(f(t-\tau) - f(t)\big) K_n(\tau)\, d\tau \right|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{-\delta} |f(t-\tau) - f(t)| \underbrace{K_n(\tau)}_{<\varepsilon} d\tau + \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \underbrace{|f(t-\tau) - f(t)|}_{<\varepsilon} K_n(\tau)\, d\tau + \frac{1}{2\pi} \int_{\delta}^{\pi} |f(t+\tau) - f(t)| \underbrace{K_n(\tau)}_{<\varepsilon} d\tau$$

$$< \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_{-\pi}^{-\delta} |f(t-\tau) - f(t)|\, d\tau + \frac{\varepsilon}{2\pi} \underbrace{\int_{-\delta}^{\delta} K_n(\tau)\, d\tau}_{\leq 2\pi} + \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_{\delta}^{\pi} |f(t-\tau) - f(\tau)|\, d\tau$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(u)|\, du + |f(t)| \right) + \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(u)| + |f(t)| \right)$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2\pi} \left(\|f\|_1 + M \right) + \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2\pi} \left(\|f\|_1 + M \right).$$

Tedy $\sigma_n^f \rightrightarrows f$ na $[A,B]$, takže $\sigma_n^f \overset{loc}{\rightrightarrows} f$ na (a,b). $\square$

POZNÁMKA. Nechť $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$, $t \in \mathbb{R}$ a $\exists\ f(t+)$, $f(t-)$ vlastní. Potom z Fejérovy věty a regularity cesàrovské metody plyne, že existuje-li $s^f(t)$, potom $s^f(t) = \dfrac{f(t+)+f(t-)}{2}$.

Věta 23.6 (trigonometrická verse Weierstrassovy věty). Nechť $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ je spojitá a 2π-periodická. Potom existuje posloupnost trigonometrických polynomů, která stejnoměrně konverguje k f na $\mathbb{R}$.

Důkaz. Podle Fejérovy věty platí $\sigma_n^f \rightrightarrows f$ na $[0, 2\pi]$, a tedy na $\mathbb{R}$. Tvrzení plyne z toho, že $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ je σ_n^f je trig. polynom. $\square$

POZNÁMKA. Je-li f je reálná, pak také σ_n^f jsou reálné.

CÍL: Zkoumat konvergenci $\sigma_n^f \to f$ v L^1-normě.

POZNÁMKA. Nechť $f, g \in P_{2\pi}$. Potom $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$

(kde $\|f\|_1 = \int_0^{2\pi} |f(t)|\,dt$) a $\|f*g\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_\infty$

(CVIČENÍ)

(kde $\|g\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{t\in[0,2\pi]} |g(t)|$).

Věta 23.7 (konvergence v L^1-normě). Nechť $f \in P_{2\pi}$. Potom

$$\lim_{n\to\infty} \| f - \sigma_n^f \|_1 = 0.$$

Důkaz. Zvolme $\varepsilon > 0$. Nalezneme spojitou funkci $g \in P_{2\pi}$ splňující: $\|f-g\|_1 < \varepsilon$.

Protože $\sigma_n^g \rightrightarrows g$ na $\mathbb{R}$, platí $\|g - \sigma_n^g\|_1 \to 0$. Potom pro $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ platí

$\|f - \sigma_n^f\|_1 \leq \underbrace{\|f-g\|_1}_{\hat{\varepsilon}} + \underbrace{\|g-\sigma_n^g\|_1}_{\to 0} + \|\sigma_n^g - \sigma_n^f\|_1$. Navíc $\|\sigma_n^g - \sigma_n^f\|_1 = \|(g-f) * K_n\|_1 \leq$

$\leq \|g-f\|_1 \cdot \|K_n\|_1 < 2\pi \cdot \varepsilon$. Tedy $\|f - \sigma_n^f\|_1 \to 0$. $\square$

<u>Věta 23.8</u> (Riemannovo–Lebesgueovo lemma). Nechť $f \in P_{2\pi}$. Potom

$$\lim_{k \to \pm\infty} \hat{f}(k) = 0.$$

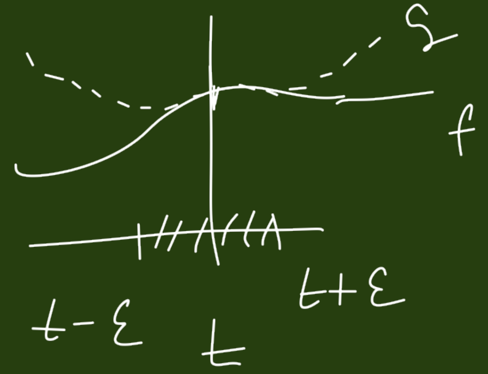
<u>Důkaz</u>. Zvolme $\varepsilon > 0$. Nalezneme spojitou funkci $g : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ takovou, že $\|f-g\|_1 < \varepsilon$. Podle Věty 23.6 nalezneme trigonometrický polynom T takový, že $\|g - T\|_\infty < \varepsilon$. Potom $\|f-T\|_1 \leq \|f-g\|_1 + \|g-T\|_1 \leq$
$$\leq \|f-g\|_1 + 2\pi \|g-T\|_\infty < \varepsilon + 2\pi\varepsilon.$$

Nalezneme $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall k \in \mathbb{Z},\ |k| \geq k_0 : \hat{T}(k) = 0$. Potom $\forall k \in \mathbb{Z},\ |k| \geq k_0$ platí: $|\hat{f}(k)| = |\hat{f}(k) - \hat{T}(k)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f(t) - T(t)) e^{-ikt} \, dt \right|$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \underbrace{\|f - T\|_1}_{< \varepsilon + 2\pi\varepsilon} \cdot \underbrace{\|e^{ikt}\|_\infty}_{=1} < \varepsilon \left(1 + \frac{1}{2\pi}\right).$$

Tedy $\lim_{k \to \pm\infty} \hat{f}(k) = 0$. $\square$

Věta 23.9 (o lokalisaci). Nechť $\varepsilon > 0$, $t \in \mathbb{R}$, $f, g \in \mathcal{P}_{2\pi}$ a $f(\tau) = g(\tau)$ pro každé $\tau \in (t-\varepsilon, t+\varepsilon)$. Potom $\lim\limits_{n \to \infty} \left(s_n^f(t) - s_n^g(t) \right) = 0$.



Důkaz. Položme
$$h(\tau) = \frac{f(t-\tau) - g(t-\tau)}{\sin\left(\frac{\tau}{2}\right)} \quad \text{pro } \tau \in \mathbb{R}.$$

Potom $h(\tau) = 0$ $\forall \tau \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, a tedy $h \in \mathcal{P}_{2\pi}$. Zvolme $n \in \mathbb{N}$. Potom

$$s_n^f(t) - s_n^g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(f(t-\tau) - g(t-\tau) \right) \cdot D_n(\tau)\, d\tau$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(\tau) \sin\left(\left(n + \tfrac{1}{2}\right)\tau \right) d\tau = \frac{1}{4\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\underbrace{h(\tau) e^{i\frac{\tau}{2}}}_{\in \mathcal{P}_{2\pi}} e^{in\tau} - \underbrace{h(\tau) e^{-i\frac{\tau}{2}}}_{\in \mathcal{P}_{2\pi}} e^{-in\tau} \right) d\tau \longrightarrow 0$$

Tedy podle Věty 23.8 platí $\lim\limits_{n \to \infty} \left(s_n^f(t) - s_n^g(t) \right) = 0$. $\square$

<u>Věta 23.10</u> (Fourierovy koeficienty určují funkci). Nechť $f, g \in P_{2\pi}$. Jestliže $\forall k \in \mathbb{Z}: \hat{f}(k) = \hat{g}(k)$, potom $f = g$ skoro všude.

<u>Důkaz.</u> Zvolme $\varepsilon > 0$. Podle Věty 23.7 nalezneme $n \in \mathbb{N}$ takové, že $\|f - \sigma_n^f\|_1 < \varepsilon$ a $\|g - \sigma_n^g\|_1 < \varepsilon$. Protože $\sigma_n^f = \sigma_n^g$, dostáváme

$$\|f-g\|_1 \leq \|f - \sigma_n^f\|_1 + \|\sigma_n^g - g\|_1 < 2\varepsilon.$$

Tedy $\|f-g\|_1 = 0 \implies f = g$ skoro všude. $\square$