23.2. CESÀROVSKÁ SČÍTATELNOST FOURIEROVÝCH ŘAD

Ernesto Cesàro (1859 – 1906)

1703 G. Grandi : $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1-1+1-1+1-1 \dots = \frac{1}{2}$.

Jak to dokázat?

- $S = 1-1+1+\dots = 1-S \Rightarrow S = \frac{1}{2}$
- $\sum_{n=0}^{\infty} (-1+\varepsilon)^n = \frac{1}{2-\varepsilon} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = \lim_{\varepsilon \to 0+} \sum_{n=0}^{\infty} (-1+\varepsilon)^n = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2-\varepsilon} = \frac{1}{2}$
- $\sum_{n=0}^{N} z^n$, $\lim_{N\to\infty}$ .. analytické pokračování ... $z=-1 \Rightarrow \frac{1}{2}$.

DEFINICE. Řekneme, že řada komplexních čísel $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ je cesàrovsky sčitatelná k číslu $\sigma \in \mathbb{C}$, značíme $(c)\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sigma$, jestliže $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} s_k = \sigma$, kde $s_k = \sum_{j=0}^{k} a_j$, $k \in \mathbb{N}$.

PŘÍKLAD. $a_n = (-1)^n$, $\quad s_n = 1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots,$

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} s_k = 1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{1}{2}, \ldots \quad \begin{cases} \frac{k}{2k-1} \\ \frac{1}{2} \end{cases} \to \frac{1}{2}$$

Tedy $\quad (c)\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = \frac{1}{2}$.

POZNÁMKA. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s \implies (c)\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$ (je regulární).

(CVIČENÍ)

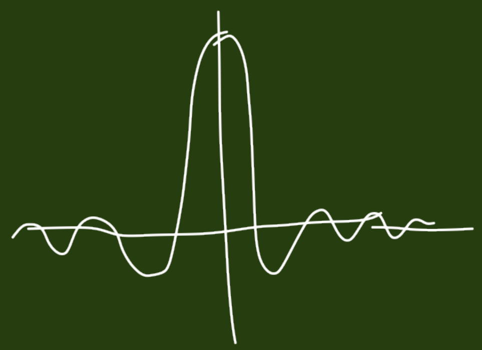
CVIČENÍ $1-2+3-4+5-6+7-8+\cdots$

Vymyslete metodu, při jejímž použití bude součet $\frac{1}{4}$.

(řada je Cauchyův součin dvou Grandiho řad)

DEFINICE. Nechť $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$. Položme $D_n(t)=\sum_{k=-n}^{n} e^{ikt}$, $t\in\mathbb{R}$.

Funkci D_n nazýváme (n-tým) Dirichletovým jádrem.



Lemma 23.3 (vlastnosti Dirichletova jádra). Nechť $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Potom

(a) $\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}: \quad D_n(t) = \dfrac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$, $\quad \left(D_n(t) = 1 + 2\cos t + \dots + 2\cos(nt)\right)$

(b) D_n je spojitá, sudá, 2π-periodická, $D_n(0) = 2n+1$,

(c) $\displaystyle\int_0^{2\pi} D_n(t)\,dt = 2\pi$,

(d) $\forall f \in \mathcal{P}_{2\pi}$, $\quad s_n^f = D_n * f$ na $\mathbb{R}$.

Důkaz. (a) $\displaystyle D_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt} = e^{-int} \sum_{k=0}^{2n} (e^{it})^k = e^{-int} \frac{e^{i(2n+1)t} - 1}{e^{it} - 1}$

$$= \frac{e^{i(n+\frac{1}{2})t} - e^{-i(n+\frac{1}{2})t}}{e^{i\frac{t}{2}} - e^{-i\frac{t}{2}}} = \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

Tvrzení (b) a (c) jsou zřejmá.

(d) $s_n^f(t) = \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k) e^{ikt} = \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} f(s) e^{-iks} ds \right) e^{ikt}$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(f(s) \sum_{k=-n}^{n} e^{ik(t-s)} \right) ds = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(s) D_n(t-s) ds = (D_n * f)(t).$$

$\square$

<u>DEFINICE</u>. Nechť $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Položme $K_n(t) = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} D_j(t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Funkci K_n nazýváme (n-tým) <u>Fejérovým jádrem</u>.

<u>ZNAČENÍ</u>. Nechť $f \in P_{2\pi}$ a $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Označme

$$\sigma_n^f(t) = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} s_j^f(t), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Lemma 23.4 (vlastnosti Fejérova jádra). Nechť $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Potom

(a) $\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi;\, k \in \mathbb{Z}\}: \quad K_n(t) = \dfrac{1}{n+1} \left(\dfrac{\sin\left(\frac{n+1}{2} t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \right)^2, \quad t \in \mathbb{R},$

(b) K_n je spojitá, nezáporná, sudá, 2π-periodická, $K_n(0) = n+1$,

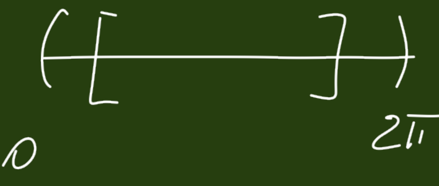
(c) $\displaystyle\int_0^{2\pi} K_n(\tau)\, d\tau = 2\pi,$

(d) $\forall f \in P_{2\pi}: \quad \sigma_n^f = K_n * f,$

! (e) $K_n \overset{loc}{\rightrightarrows} 0$ na $(0, 2\pi)$.

Důkaz. (a), (d) ... výpočtem, (b), (c) zřejmá, (e) provedeme.

(e) Zvolme $\delta \in (0,\pi)$. Potom $\forall t \in [\delta, 2\pi-\delta]$

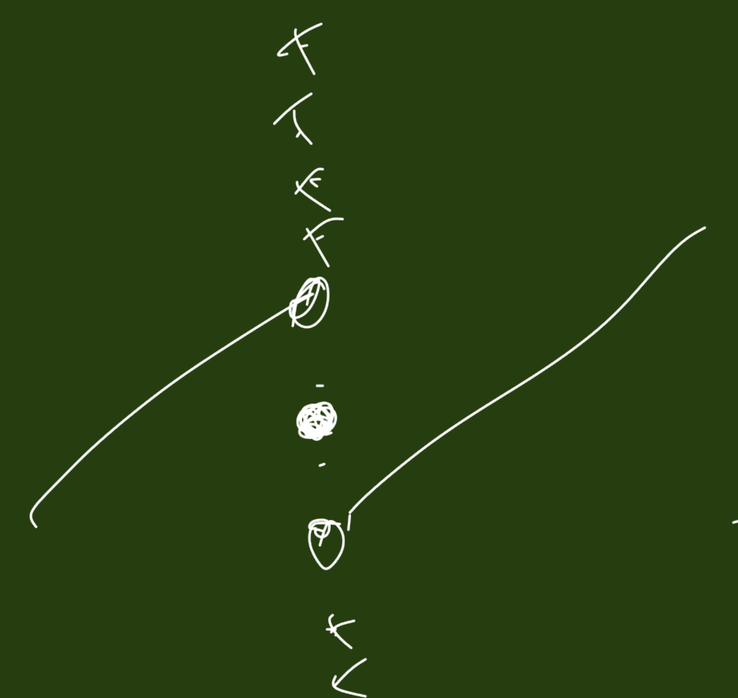


platí $$0 \le K_n(t) \le \frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{\left(\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)\right)^2},$$ a tedy $K_n \rightrightarrows 0$ na $[\delta, 2\pi-\delta]$.

Dle charakterizace stejnoměrné konvergence na intervalu (δ lib.) platí $K_n \overset{loc}{\rightrightarrows} 0$ na $(0, 2\pi)$. $\square$

<u>OTÁZKA</u>. Kam konvergují S_n^f, σ_n^f ?

Co když f není spojitá?



Věta 23.5 (Fejér). Nechť $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$.

(a) Jestliže $t \in \mathbb{R}$ a existují vlastní $f(t+)$ a $f(t-)$, potom

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n^f(t) = \frac{f(t+)+f(t-)}{2}.$$

(b) Jestliže $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a<b$, a f je spojitá na (a,b), potom $\sigma_n^f \overset{loc}{\rightrightarrows} f$ na (a,b).

Důkaz. (a) $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, označme $s = \dfrac{f(t+)+f(t-)}{2}$, potom

$$\int_{-\pi}^{0} \left(f(t-\tau)-s\right) K_n(\tau)\,d\tau \underset{\substack{\tau \to -\tau \\ (K_n \text{ sudá})}}{\overset{VOS}{=}} \int_0^{\pi} \left(f(t+\tau)-s\right) K_n(\tau)\,d\tau.$$

Tedy $\sigma_n^f(t) - s = (K_n * f)(t) - s = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t-\tau) K_n(\tau)\, d\tau - s$ $\quad\left(\int_0^{2\pi} K_n = 2\pi\right)$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \big(f(t-\tau) - s\big) K_n(\tau)\, d\tau \overset{\text{per.}}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \dots = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} \dots + \int_0^{\pi} \dots\right).$$

Celkem

$$\sigma_n^f(t) - s = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \underbrace{\big(f(t+\tau) + f(t-\tau) - 2s\big)}_{\text{malé blízko } 0 \text{ (pro } \tau)} \underbrace{K_n(\tau)}_{\substack{\text{malé}\\ \text{daleko od } 0}}\, d\tau.$$

Zvolme $\varepsilon > 0$. Najdu $\delta > 0$: $|f(t+\tau) + f(t-\tau) - 2s| < \varepsilon$ pro $\tau \in (0, \delta)$.

K δ najdu $n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_0\ \forall \tau \in [\delta, \pi]$: $K_n(\tau) < \varepsilon$. Potom

$$|\sigma_n^f(t) - s| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} |f(t+\tau) + f(t-\tau) - 2s| \cdot K_n(\tau)\, d\tau = \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{\delta} + \int_{\delta}^{\pi}\right) \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_0^{\delta} K_n(\tau)\, d\tau + \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_{\delta}^{\pi} |f(t+\tau) + f(t-\tau) - 2s|\, ds = \mathrm{I} + \mathrm{II}. \text{ Pak } \mathrm{I} < \varepsilon$$

(neboť $\int_0^{\delta} K_n \leq 2\pi$).

$$\underline{\mathrm{I}} \leq \frac{\varepsilon}{2\pi}\left(\int_0^{\pi} |f(t+\tau)|\,d\tau + \int_0^{\pi} |f(t-\tau)|\,dt + \pi|s|\right)$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2\pi}\left(\int_0^{2\pi} |f(u)|\,du + \int_0^{2\pi} |f(u)|\,du + \pi|s|\right)$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2\pi}\left(2 \cdot \|f\|_{L^1} + \pi s\right).$$

Tedy $\quad |\sigma_n^f(t) - s| \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty).$

(b) příště + bodová konvergence.