$f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ $\qquad f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}, t \in \mathbb{R} \qquad c_k = ?$

<u>Věta 23.1</u> $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $\{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$, $\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikt} \rightrightarrows f$ na $\mathbb{R}$

$$\Rightarrow \quad c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt}\, dt, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

<u>Důkaz.</u> Zvolme $m \in \mathbb{Z}$. Potom $\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{i(k-m)t} \rightrightarrows f(t) e^{-imt}$ na $\mathbb{R}$,

a tedy
$$\int_0^{2\pi} f(t) e^{-imt}\, dt = \int_0^{2\pi} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{i(k-m)t}\, dt$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{i(k-m)t}\, dt = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} c_k \int_0^{2\pi} e^{i(k-m)t}\, dt = 2\pi c_m,$$

neboť
$$\int_0^{2\pi} e^{ijt}\, dt = \int_0^{2\pi} (\cos jt + i \sin jt)\, dt = \begin{cases} 0 & j \neq 0 \\ 2\pi & j = 0. \end{cases}$$

$\square$

ZNAČENÍ: Označme

$$\mathcal{P}_{2\pi} = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ f \text{ je } 2\pi\text{-periodická},\ f \in L^1([0,2\pi]) \}.$$

DEFINICE. Nechť $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$. Položme $\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-ikt}\,dt$, $k \in \mathbb{Z}$. Čísla $\hat{f}(k)$ se nazývají Fourierovy koeficienty f. Řada $S^f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)e^{ikt}$, $t \in \mathbb{R}$, se nazývá Fourierova řada f (v komplexním tvaru). Pro $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ označme

$$s_m^f(t) = \sum_{k=-m}^{m} \hat{f}(k)e^{ikt},\quad t \in \mathbb{R}.$$

Je-li $t \in \mathbb{R}$, $s \in \mathbb{C}$ a $\lim_{m\to\infty} s_m^f(t) = s$, pak říkáme, že součet Fourierovy řady f v t je roven s. Píšeme $\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \hat{f}(\ell)e^{i\ell t} = s$. Jestliže S^f je Fourierova řada funkce f, pak píšeme $f \sim S^f$.

POZNÁMKA. Místo $\{e^{ikt}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ často pracujeme s $\{1, \cos t, \sin t, \cos(2t), \sin(2t), \dots\}$.

Připomeňme $\quad \cos t = \dfrac{e^{it}+e^{-it}}{2}$, $\quad \sin t = \dfrac{e^{it}-e^{-it}}{2i}$, $\quad t\in\mathbb{R}$. Nechť $f\in\mathcal{P}_{2\pi}$.

Položme $a_k = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\cos(kt)\,dt$, $b_k = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\sin(kt)\,dt$, $k\in\mathbb{Z}$, potom

$$\hat f(0) = \frac{a_0}{2}, \quad \hat f(k) = \frac{a_k - i b_k}{2}, \quad k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}; \text{ neboli}$$

$$a_k = \hat f(k) + \hat f(-k), \quad b_k = i\left(\hat f(k) - \hat f(k)\right), \quad k\in\mathbb{Z}.$$

Navíc

Tedy

$$a_{-k} = a_k, \quad b_{-k} = -b_k, \quad k\in\mathbb{Z}.$$

$$\hat{f}(k)e^{ikt} + \hat{f}(-k)e^{-ikt} = \frac{a_k - ib_k}{2} e^{ikt} + \frac{a_{-k} - ib_{-k}}{2} e^{-ikt}$$

$$= \frac{a_k - ib_k}{2} e^{ikt} + \frac{a_k + ib_k}{2} e^{-ikt}$$

$$= \frac{a_k}{2}\left(e^{ikt} + e^{-ikt}\right) - i\frac{b_k}{2}\left(e^{ikt} - e^{-ikt}\right)$$

$$= a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt), \qquad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\},\ t \in \mathbb{R}.$$

Tedy $$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ikt} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)\right), \quad t \in \mathbb{R}$$

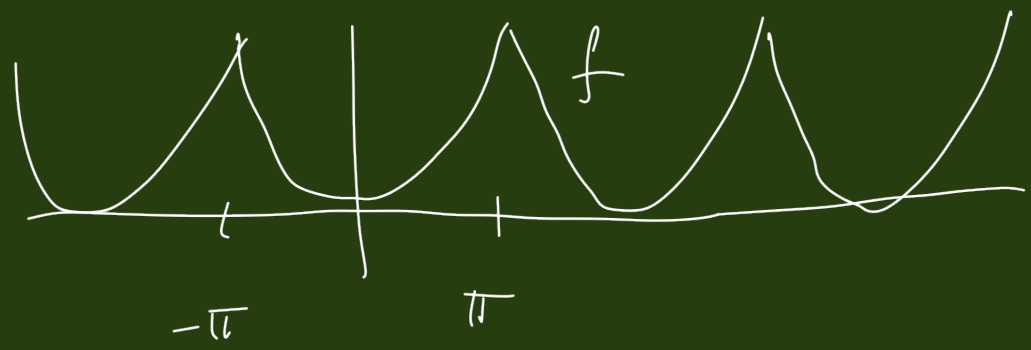
a $$S_n^f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)\right), \quad t \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Odtud plyne, že je-li f reálná funkce, potom s_n^f jsou rovněž reálné. Neboť je-li f reálná, pak jsou $a_k, b_k \in \mathbb{R}$. Je-li $f \in P_{2\pi}$ sudá, potom $b_k = 0$ $\forall k \in \mathbb{Z}$ a $a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos(kt)\, dt$, $k \in \mathbb{Z}$.

Je-li $f \in P_{2\pi}$ lichá, potom $a_k = 0$ $\forall k \in \mathbb{Z}$ a $b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin(kt)\, dt$, $k \in \mathbb{Z}$. Řady $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kt)$ a $\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kt)$ po řadě

nazýváme <u>cosinovou řadou</u> a <u>sinovou řadou</u>.

PŘÍKLAD. Nechť $f(t)=t^2$ pro $t\in[-\pi,\pi)$ a $f\in\mathcal{P}_{2\pi}$.



Nalezněte s^f.

Řešení. f sudá $\Rightarrow$ $b_k=0$ $\forall k\in\mathbb{N}$, $a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi t^2\,dt=\frac{2}{\pi}\,\frac{\pi^3}{3}=\frac{2}{3}\pi^2$,

$$a_k=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi t^2\cos(kt)\,dt \overset{\text{per partes}}{=} \frac{(-1)^k 4}{k^2},\quad k\in\mathbb{N}.$$

Tedy
$$s^f(t)=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}\cos(kt),\quad t\in\mathbb{R}.$$

Máme
$$t^2\sim\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}\cos(kt),\quad t\in\mathbb{R}.$$

OTÁZKA: $=$? (Konverguje řada vpravo k funkci vlevo?)

Když $t^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}\cos(kt)$, $t \in \mathbb{R}$, pak např.:

<u>$t=0$</u>: $$0 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12},$$

nebo

<u>$t=\pi$</u>: $$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k(-1)^k}{k^2} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \pi^2\,\frac{1-\frac{1}{3}}{4} = \frac{\pi^2}{6}.$$

<u>CÍL</u>: Nalézt postačující podmínky pro konvergenci Fourierových řad.

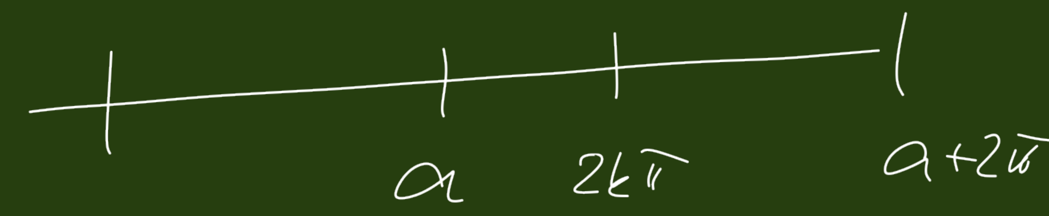
<u>OTÁZKY</u>: Konverguje s^f pro danou f? Je $s^f = f$?

PROČ $\sin, \cos$ (e^{ikt})? $y'' + y = 0$ ... elem. řešení – $\sin, \cos$

Lemma 23.2. Nechť $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$ a $a \in \mathbb{R}$. Potom $\int_0^{2\pi} f = \int_a^{a+2\pi} f$.

Důkaz. Z věty o substituci dostaneme $\forall \alpha, \beta, \alpha < \beta, \forall k \in \mathbb{Z}$:

$$\int_\alpha^\beta f(t)\,dt = \int_{\alpha+2k\pi}^{\beta+2k\pi} f(t)\,dt.$$



Nalezneme $k \in \mathbb{Z}$ takové, že $a \leq 2k\pi < a + 2\pi$. Potom

$$\int_a^{a+2\pi} f(t)\,dt = \int_a^{2k\pi} f(t)\,dt + \int_{2k\pi}^{a+2\pi} f(t)\,dt = \int_{a-2(k-1)\pi}^{2\pi} f(t)\,dt + \int_0^{a-2(k-1)\pi} f(t)\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} f(t)\,dt. \qquad \square$$

POZNÁMKA. Nechť $f \in P_{2\pi}$. Potom $\forall a \in \mathbb{R}$

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_a^{a+2\pi} f(t)e^{-ikt}\,dt, \quad a_k = \frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi} f(t)\cos(kt)\,dt, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi} f(t)\sin(kt)\,dt.$$

Nejčastěji se používá $a=0$, $a=-\pi$, $a=-2\pi$ apod.

DEFINICE. Nechť $f, g \in P_{2\pi}$. Potom konvoluci funkcí f, g definujeme předpisem

$$(f*g)(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t-s)g(s)\,ds, \quad t \in \mathbb{R}.$$

POZNÁMKA. Je-li $f, g \in P_{2\pi}$, potom $f*g$ je dobře definovaná skoro všude konečná měřitelná funkce.