OTÁZKA: kdy platí $f(b)-f(a)=\int_a^b f'(x)\,dx$?

Věta 22.9 (integrál derivace AC funkce). Nechť $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$, a $f\in AC([a,b])$. Potom $f'\in L^1([a,b])$ a

$$f(b)-f(a)=\int_a^b f'(x)\,dx.$$

Důkaz. Nejprve předpokládejme, že f je neklesající na $[a,b]$. Nechť N je množina všech bodů $x\in[a,b]$ takových, že $f'(x)$ neexistuje.

Potom $f(b)-f(a)=\lambda(f([a,b]))=\lambda(f([a,b]\setminus N)\cup f(N))$

$$=\lambda(f([a,b]\setminus N))+\lambda(f(N))\overset{V22.3}{\underset{\&\ V22.8}{=}}\int_{[a,b]\setminus N} f'(x)\,dx+0=\int_a^b f'(x)\,dx.$$

V obecném případě (připomeňme $f \in AC \Rightarrow f \in BV$) nalezneme neklesající funkce u, v takové, že $f = u - v$. Podle Věty 22.7 a konstrukce u, v z důkazu Věty 22.4(b) lze volit $u, v \in AC([a,b])$. Potom $f' = u' - v'$, a tedy tvrzení dostaneme z již dokázaného případu odečtením. $\square$

<u>DEFINICE</u>. Řekneme, že f je <u>neurčitý Lebesgueův integrál</u> funkce $\vartheta \in L^1([a,b])$, kde $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, jestliže $\exists C \in \mathbb{R}\ \forall x \in [a,b]$ platí

$$f(x) = \int_a^x \vartheta(t)\,dt + C.$$

<u>Věta 22.10</u> (neurčitý Lebesgueův integrál). Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $\theta \in L^1([a,b])$ a nechť f je neurčitý integrál θ na $[a,b]$. Potom $f \in AC([a,b])$ a $f' = \theta$ skoro všude na $[a,b]$.

<u>Důkaz.</u> Z TMI víme: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall M \subset [a,b], \lambda(M) < \delta : \int_M |\theta(x)|\,dx < \varepsilon$.

Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme příslušné $\delta > 0$. Nechť $\{[a_j, b_j]\}_{j=1}^n$, $n \in \mathbb{N}$, je systém intervalů splňující $a \le a_1 \le b_1 \le a_2 \le \dots \le a_n \le b_n \le b$ a $\sum_{j=1}^n (b_j - a_j) < \delta$. Potom

$$\sum_{j=1}^n |f(b_j) - f(a_j)| \underset{\text{def } f}{=} \sum_{j=1}^n \left| \int_{a_j}^{b_j} \theta(x)\,dx \right| \le$$

$$\le \sum_{j=1}^n \int_{a_j}^{b_j} |\theta(x)|\,dx = \int_{\bigcup_{j=1}^n [a_j, b_j]} |\theta(x)|\,dx < \varepsilon,$$ takže $f \in AC([a,b])$.

Zbývá dokázat, že $f' = \theta$ skoro všude na $[a,b]$. Víme (dle V 22.9), že f je neurčitý integrál θ i f'. Označme $\psi = \theta - f'$. Potom nulová funkce je neurčitý integrál ψ.

Víme: $\quad f(x) = \int_a^x \theta(t)\,dt + C \quad$ (tedy $C = f(a)$)

a $\quad f(x) = \int_a^x f'(t)\,dt + f(a) \quad$ (z věty 22.9),

tedy z linearity $\quad 0 = \int_a^x \big(\theta(t) - f'(t)\big)\,dt = \int_a^x \psi(t)\,dt$.

Chceme: $\psi = 0$ skoro všude. Označme $\mathcal{A}$ systém všech množin A, pro které platí $\int_A \psi(x)\,dx = 0$. Zatím víme, že $\mathcal{A}$ obsahuje všechny intervaly tvaru (a,x), $x \in [a,b]$, a tedy všechny podintervaly $[a,b]$.

Tedy $\mathcal{A}$ obsahuje všechny otevřené podmnožiny $[a,b]$ (limitním přechodem)

Tedy $\mathcal{A}$ obsahuje všechny měřitelné množiny (limitním přechodem díky regularitě Leb. míry). Označme $A^+ = \{x \in (a,b),\ \psi(x) > 0\}$ a $A^- = \{x \in (a,b),\ \psi(x) < 0\}$. Ty jsou měřitelné, a tedy patří do $\mathcal{A}$, takže

$$\int_{A^+} \psi = \int_{A^-} \psi = 0.$$

Tedy $\psi = 0$ skoro všude. $\square$

<u>Věta 22.11</u> (absolutní spojitost a neurčitý integrál). Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Potom $f \in AC([a,b])$ právě tehdy, když existuje $\theta \in L^1([a,b])$ a $C \in \mathbb{R}$ taková, že

$$f(x) = \int_a^x \theta(t)\,dt + C \quad \text{pro } x \in [a,b].$$

Důkaz. „$\Leftarrow$" ihned z V 22.10

„$\Rightarrow$" $f \in AC([a,b]) \overset{V\,22.9}{\Longrightarrow} f' \in L^1([a,b])$ & $f(x) = \int_a^x f'(t)\,dt + f(a)$ $\forall x$

a stačí položit $\theta = f'$. $\square$

Věta 22.12 (integrace per partes pro Lebesgueův integrál).

Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a $f, g \in AC([a,b])$. Potom

$$\int_a^b f'g = [fg]_a^b - \int_a^b fg'.$$

Důkaz. $f, g \in AC \Rightarrow f \cdot g \in AC \Rightarrow [fg]_a^b = \int_a^b (fg)'(t)\,dt$ a navíc

$$(fg)'(t) = \frac{d}{dt}\left(f(t)\int_a^t g'(s)\,ds\right) = f'(t)\underbrace{\int_a^t g'(s)\,ds}_{g(t)} + f(t)\,g'(t) \text{ skoro všude.}$$

atd. $\square$

23. FOURIEROVY ŘADY

23.1. ZÁKLADNÍ POJMY

DEFINICE. (a) Trigonometrickou řadou rozumíme řadu funkcí tvaru
$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}, \quad t \in \mathbb{R}, \text{ kde } k \in \mathbb{Z}, \ c_k \in \mathbb{C}.$$

(b) Trigonometrickým polynomem rozumíme funkci tvaru
$$\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikt}, \quad t \in \mathbb{R}, \text{ kde } c_k \in \mathbb{C}, \ n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \ k \in \{-n, \dots, n\}.$$
Stupněm polynomu rozumíme největší $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ takové, že $|c_k| + |c_{-k}| \neq 0$.

POZNÁMKY. (a) připomeňme: $e^{it} = \cos t + i \sin t$, $t \in \mathbb{R}$

(b) Řada $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}$ konverguje, jestliže konverguje posloupnost

$$\left\{ \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikt} \right\}_{n=0}^{\infty}.$$

OTÁZKA: Předpokládejme, že součtem řady $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}$ je funkce $f(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Co se dá říci o c_k?

Věta 23.1 (Fourierovy vzorce). Předpokládejme, že

$\left\{ \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikt} \right\}_{n=0}^{\infty}$ konverguje stejnoměrně na $\mathbb{R}$ k f.

Potom $\forall k \in \mathbb{Z}$ platí $c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} \, dt$.