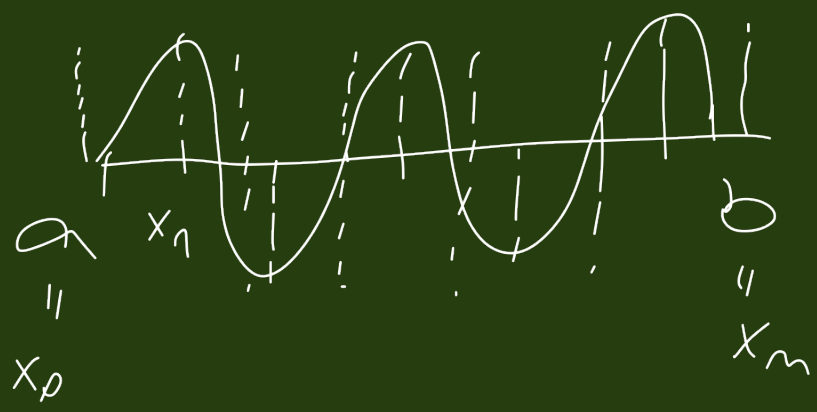
# 22.2. FUNKCE S OMEZENOU VARIACÍ




$\sin \frac{1}{x}$

$(0,1)$

POZNÁMKY. (a) $BV([a,b])$ je lineární prostor a algebra

$(f, g \in BV([a,b]) \Rightarrow f \cdot g \in BV([a,b]))$

(b) $f \uparrow$, pak $V(f; a,b) = V^+(f; a,b) = f(b) - f(a)$, a tedy $f \in BV$

(c) $V(f; a,b) \geq |f(b) - f(a)|$

(d) je-li $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, potom

$$V(f; a,b) = \sum_{i=1}^{n} V(f; x_{i-1}, x_i).$$

**PŘÍKLAD.** Rozhodněte, zda $R \in BV([0,1])$ a zda $R^2 \in BV([0,1])$.

**Věta 22.4** (omezená variace a monotonie). Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.

(a) Jestliže $f \in BV([a,b])$, potom $V_f = V_f^+ + V_f^-$ a

$$\forall x \in [a,b]: \qquad f(x) - f(a) = V_f^+(x) - V_f^-(x).$$

(b) $f \in BV([a,b]) \Leftrightarrow \exists\, u, v \uparrow$ na $[a,b]$ takové, že $f = u - v$.

**Důkaz.** Zvolme $x \in (a,b]$ a dělení $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = x$. Potom

$$f(x) - f(a) = \sum_{i=1}^{n} \big(f(x_i) - f(x_{i-1})\big)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \big(f(x_i) - f(x_{i-1})\big)^+ - \sum_{i=1}^{n} \big(f(x_i) - f(x_{i-1})\big)^-.$$

$$f(x) - f(a) = \sum_{i=1}^{m} \left(f(x_i) - f(x_{i-1})\right)^+ - \sum_{i=1}^{m} \left(f(x_i) - f(x_{i-1})\right)^- .$$

Tedy $f(x) - f(a) \leq V^+(f; a, x) - \sum_{i=1}^{m} \left(f(x_i) - f(x_{i-1})\right)^-$.

Přechodem k $\sup_D$: $f(x) - f(a) \leq V^+(f; a, x) - V^-(f; a, x)$.

Obdobně $f(x) - f(a) \geq \sum_{i=1}^{m} \left(f(x_i) - f(x_{i-1})\right)^+ - V^-(f; a, x)$,

a opět přechodem k $\sup_D$: $f(x) - f(a) \geq V^+(f; a, x) - V^-(f; a, x)$.

Zbývající tvrzení (a) cvičení.

(b) „$\Leftarrow$" plyne z toho, že každá monotónní funkce má omezenou variaci a z linearity $BV([a,b])$.

„$\Rightarrow$" Nechť $f \in BV([a,b])$. Položme

$$u(x) = V_f(x) \quad \text{a} \quad v(x) = V_f(x) - f(x) \quad \text{pro} \quad x \in [a,b].$$

Potom zřejmě $u \uparrow$ a $u - v = f$. Zbývá dokázat: $v \uparrow$.

Zvolme $x, y$ splňující $a \le x \le y \le b$. Potom

$$v(y) - v(x) = V_f(y) - f(y) - \left(V_f(x) - f(x)\right) =$$

$$= V_f(y) - V_f(x) - \left(f(y) - f(x)\right)$$

$$= V(f; x, y) - \left(f(y) - f(x)\right) \ge 0,$$

a tedy $v \uparrow$. $\square$

**POZNÁMKA.** Mezi $BV([a,b])$ a $C([a,b])$ není vztah:

$\chi_{[0,1]} \in BV([-1,1]) \setminus C([-1,1])$,

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin \frac{1}{x^2}, & x \in [-1,1] \setminus \{0\} \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

potom $f \in C([-1,1]) \setminus BV([-1,1])$ (cvičení)

**Věta 22.5** (vlastnosti funkcí s omezenou variací).

Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a $f \in BV([a,b])$. Potom

- $f$ je omezená na $[a,b]$,
- $f$ má nejvýše spočetně mnoho bodů nespojitosti,
- $f$ má v každém bodě $[a,b]$ jednostranné limity,
- existuje $f'(x)$ skoro všude na $[a,b]$.

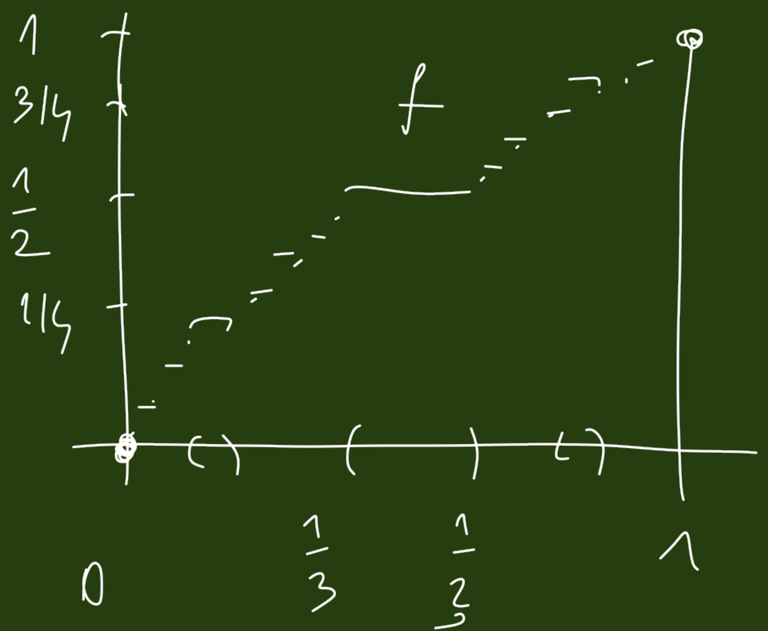
**Bez důkazu**, vše se „dědí" z vlastností monotónních funkcí.

$\square$

# 22.3. ABSOLUTNĚ SPOJITÉ FUNKCE.

otázky: kdy platí $f(b)-f(a)=\int_a^b f'(x)\,dx$, $\int_a^b fg' = [fg]_a^b - \int_a^b f'g$ pro Leb. int.?

kdy to neplatí? Cantorova funkce




$$f(x)=\begin{cases}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2^n}, & x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2a_n}{3}, \ x\in C, \ a_n\in\{0,1\}\\ \sup\limits_{y\leq x,\ y\in C} f(y), & x\in[0,1]\setminus C\end{cases}$$

(jednozn. triadická báze $\frac{1}{3}\neq 0{,}1$, nýbrž $\frac{1}{3}=0{,}02222\ldots$)

Potom $f$ je spojitá (!), monotónní (tedy BV), $f'(x)=0$ skoro všude, ale $0=\int_0^1 f'(x)\,dx \neq f(1)-f(0)=1$. Tedy (stejnoměrná) spojitost a $\exists f'$ s.v. nestačí).

Této funkci chybí nějaká jiná vlastnost. Jaká?

**DEFINICE.** Nechť $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$, a $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. Řekneme, že $f$ je *absolutně spojitá* na $[a,b]$, jestliže $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0$ takové, že pro každý systém intervalů $\{[a_i,b_i]\}_{i=1}^{n}$, $n\in\mathbb{N}$, splňující $a\le a_1\le b_1\le a_2\le b_2\le \dots \le a_n\le b_n\le b$ a $\sum\limits_{i=1}^{n}(b_i-a_i)<\delta$ platí $\sum\limits_{i=1}^{n}|f(b_i)-f(a_i)|<\varepsilon$. Množinu všech absolutně spojitých funkcí na $[a,b]$ značíme $AC([a,b])$.

**POZNÁMKY.** (a) $AC([a,b])$ je lineární prostor a algebra (cvičení)

(b) $Lip([a,b]) \subsetneq AC([a,b]) \subsetneq C([a,b]) \cap BV([a,b])$

$\sqrt{x} \in [0,1]$ $\qquad\qquad \longrightarrow$ Cantorova funkce

**Lemma 22.6.** Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Potom $f \in AC([a,b])$ právě tehdy, když $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ takové, že pro každý systém intervalů $\{[a_i, b_i]\}_{i=1}^{n}$, $n \in \mathbb{N}$, splňující $a \le a_1 \le b_1 \le a_2 \le \dots \le b_n \le b$ a $\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i) < \delta$ platí $\sum_{j=1}^{n} V(f; a_j, b_j) < \varepsilon$.

**Důkaz.** „$\Leftarrow$" triviální, „$\Rightarrow$" zatím odložíme. $\square$

**Věta 22.7** (variace AC funkce). Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a $f \in AC([a,b])$. Potom $V_f, V_f^+, V_f^- \in AC([a,b])$.

**Důkaz.** Tvrzení plyne z Lemmatu 22.6. $\square$

**Věta 22.8** (Luzinova $N$-vlastnost). Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a<b$, a $f \in AC([a,b])$. Nechť $N \subseteq [a,b]$, $\lambda(N) = 0$. Potom $\mathcal{L}(f(N)) = 0$.

**Důkaz.** Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $\delta > 0$ z def. AC. Nalezneme $G \subset (a,b)$ otevřenou, obsahující $N \cap (a,b)$ a splňující $\lambda(G) < \delta$. Potom existují intervaly $\{(a_j, b_j)\}_{j=1}^{\infty}$ takové, že $G = \bigcup_{j=1}^{\infty} (a_j, b_j)$. Obraz $[a_j, b_j]$ je uzavřený interval, označme jej $[\alpha_j, \beta_j]$, $j \in \mathbb{N}$. Nalezneme intervaly $[x_j, y_j] \subseteq [a_j, b_j]$ splňující $\{f(x_j), f(y_j)\} = \{\alpha_j, \beta_j\}$. Dále. Potom $\forall m \in \mathbb{N}: \sum_{j=1}^{m} (y_j - x_j) < \delta$, takže $\sum_{j=1}^{m} (\beta_j - \alpha_j) = \sum_{j=1}^{m} |f(y_j) - f(x_j)| < \varepsilon$.

Pošleme $m \to \infty$ a dostaneme $\mathcal{L}(f(N)) \le \sum_{j=1}^{\infty} (\beta_j - \alpha_j) < \varepsilon$, tedy $\mathcal{L}(f(N)) = 0$. $\square$