Věta 21.14 (BC pro zobecněné řady). Zobecněná řada $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ konverguje právě tehdy, když

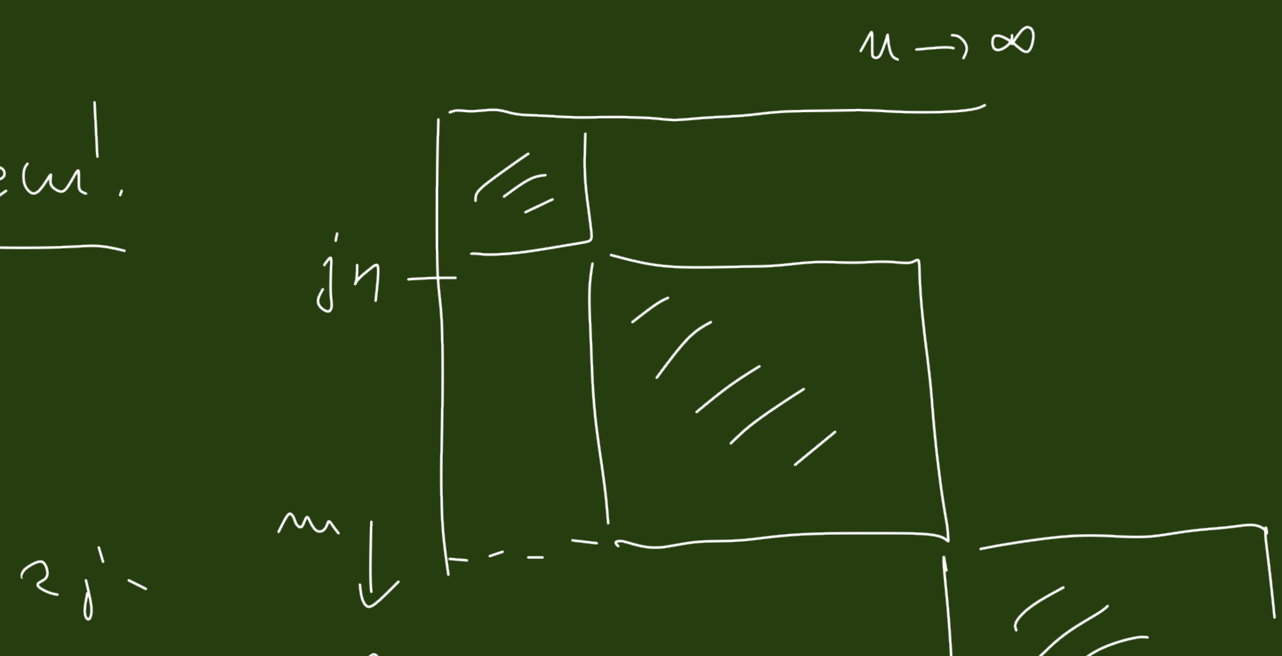
$$\forall \varepsilon>0\ \exists F\in\mathcal{F}(I)\ \forall F'\in\mathcal{F}(I),\ F'\cap F=\emptyset:\ \Big|\sum_{\alpha\in F'} x_\alpha\Big|<\varepsilon.$$

PŘÍKLAD $$\sum_{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \frac{1}{n^2+m^2}=\infty.$$

Řešení.

$j\in\mathbb{N}$, $I_j=\{(n,m),\ j+1\le n,m\le 2j\}$

$$\sum_{(n,m)\in I_j}\dots=\sum_{m=j+1}^{2j}\sum_{n=j+1}^{2j}\frac{1}{n^2+m^2}\ge\sum\sum\frac{1}{(2j)^2\cdot 2}=\dots=\frac{1}{8}$$



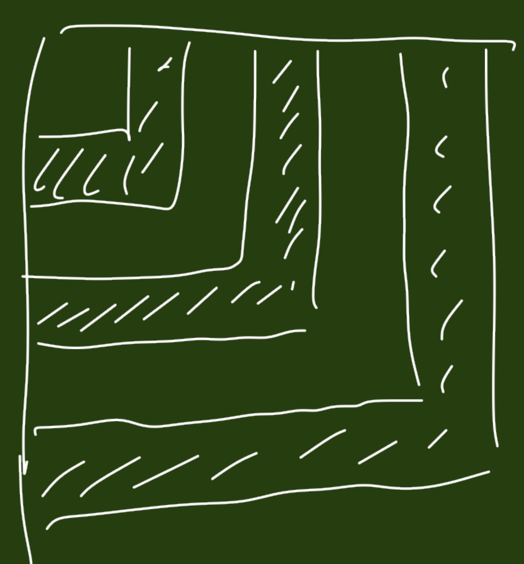
$\Rightarrow \sum=\infty.$ (I_{2j})

$$\sum_{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \frac{1}{n^2+m^2} \ge \sup_k \sum_{(n,m)\subset \bigcup_{j=0}^{k} I_{2^j}} \frac{1}{n^2+m^2} \underset{\text{disj.}}{=} \sup_k \sum_{j=0}^{k} \sum_{(n,m)\in I_{2^j}} \frac{1}{n^2+m^2}$$

$$= \sup_k \frac{k+1}{8} = \infty$$

PŘÍKLAD $\displaystyle\sum_{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \frac{1}{n^3+m^3}$ ... dokažte, že konverguje

Řešení



$$N_k = \{ (n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N},\ \max\{n,m\} = k\},\ k\in\mathbb{N}$$

$$\sum_{(n,m)\in N_k} \frac{1}{n^3+m^3} \le \sum_{(n,m)\in N_k} \frac{1}{\max\{n,m\}^3} = \sum_{(n,m)\in N_k} \frac{1}{k^3} =$$

$$= \frac{2k-1}{k^3}, \quad a \quad \sum \frac{2k-1}{k^3} < \infty \quad \text{atd.}$$

CVIČENÍ: $\displaystyle\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \frac{1}{m^2+n^3} = \ ?$

PŘÍKLAD. $\displaystyle\sum_{q\in\mathbb{Q}\cap(0,1)} q = \infty$

Řešení. $\{q\in\mathbb{Q}\cap(0,1)\,;\ q>\frac{1}{2}\}$ je nekonečná $\Rightarrow$ div.

22. FUNKCE S KONEČNOU VARIACÍ A ABS. SPOJITÉ FUNKCE

Riemannův integrál $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$

Riemannův-Stieltjesův .. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dg(x)$ ... ?

pro jaké funkce g dává smysl? např. g mon.

Lebesgueův integrál

- $\theta \in L^1(\mathbb{R})$, def. $f(x) = \int_a^x \theta(t)\,dt + C$

  Platí $f' = \theta$? (alespoň s.v. ?)

- $f' \in L^1$, platí potom $\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$?

Sendvič: $C^1 \subset \mathrm{Lip} f \subset \{ f;\ \exists f' \text{ s.v.} \}$

příliš velká mezera, chceme mezi-prostory

To budou AC a BV. Souvisí to s monotónními funkcemi.

Výhody AC a BV : jsou to algebry

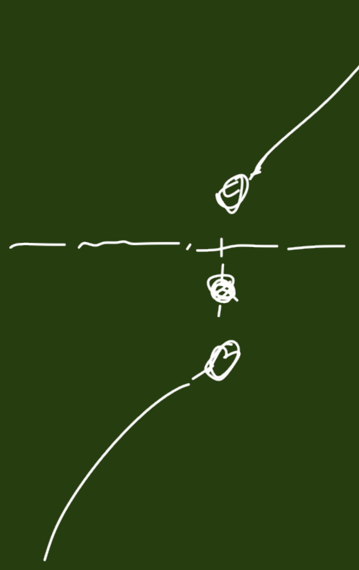
BV je algebra funkcí nikoli nutně spojitých, $\exists f'$ s.v.

($\Rightarrow$ jsou to zobecněná řešení nelineárních problémů, ODR, PDR, fyzika, ...)

Monotónní funkce na intervalu : má jednostranné limity

$\Rightarrow$ má spočetně mnoho bodů nespojitosti

$r \in \mathbb{Q}$



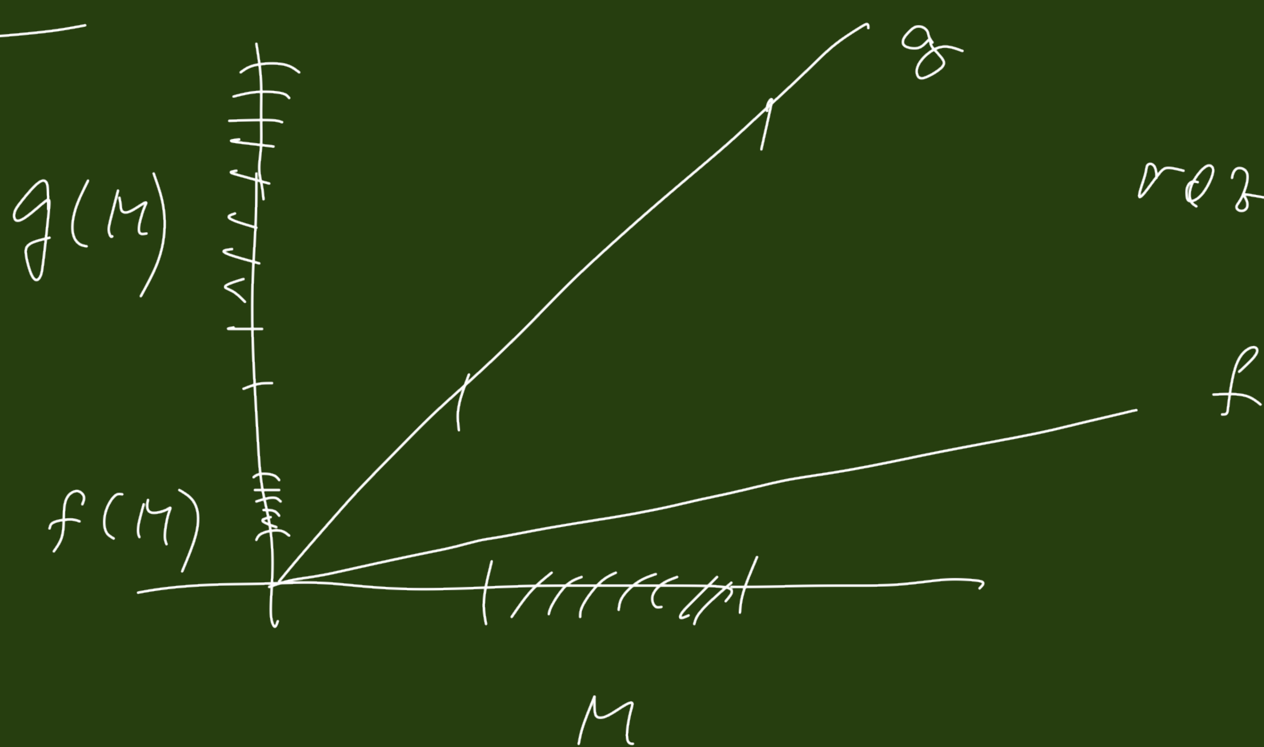
OTÁZKA : má $f'(x)$ skoro všude ? (ANO)

POZN. Všechny integrály Leb., λ ... Leb. míra na $\mathbb{R}$,

λ^* — vnější Leb. míra na $\mathbb{R}$

22.1. DERIVACE MONOTÓNNÍ FUNKCE

PRVNÍ CÍL: Jak se mění míra obrazu oproti míře vzoru?



rozhoduje „derivace"

DEFINICE. Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval, $x \in I$ je vnitřní bod I, $f: I \to \mathbb{R}$.

Potom horní derivaci f v x definujeme předpisem

$$\overline{D} f(x) = \limsup_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

a dolní derivaci f v x předpisem

$$\underline{D} f(x) = \liminf_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Věta 22.1 (míra vzoru a obrazu). Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval, $f: I \to \mathbb{R}$ neklesající, $M \subset I$ a $c > 0$.

(a) Jestliže $\overline{D} f(x) > c$ na M, potom $\lambda^*(f(M)) \geq c\,\lambda^*(M)$.

(b) Jestliže $\underline{D} f(x) < c$ na M, potom $\lambda^*(f(M)) \leq c\,\lambda^*(M)$.

ZATÍM BEZ DŮKAZU

IDEA: pokrývací věta, vitaliovský jemná pokrytí...

Věta 22.2 (derivace monotónní funkce). Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval a $f : I \to \mathbb{R}$ je monotónní. Potom pro skoro každé $x \in I$ existuje $f'(x)$.

Důkaz. BÚNO $f \uparrow$. Zvolme $p, q \in \mathbb{R}$, $p < q$ a označme

$$M_{p,q} = \{ x \in I ;\ \underline{D} f(x) < p < q < \overline{D} f(x) \}.$$

Podle Věty 22.1 platí $q\,\lambda^*(M_{p,q}) \le \lambda^*(f(M_{p,q})) \le p\,\lambda^*(M_{p,q})$, tedy $\lambda^*(M_{p,q}) = 0$. Položme $M = \{ x \in I,\ \text{neexistuje } f'(x) \}$. Potom

$$M = \bigcup_{\substack{0 < p < q \\ p,q \in \mathbb{Q}}} M_{p,q}, \quad \text{a tedy} \quad \lambda^*(M) = 0. \qquad \square$$

Věta 22.3 (integrál derivace monotónní funkce). Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ je neklesající, $M \subset [a,b]$ je měřitelná a $\forall x \in M$ $\exists$ vlastní $f'(x)$. Potom f' je lebesgueovsky integrovatelná, $f(M)$ je měřitelná a platí
$$\int_M f'(x)\,dx = \lambda\big(f(M)\big).$$

Důkaz. Protože M je měřitelná, existují množiny M_b a M_0 takové, že M_b je borelovská, $\lambda(M_0) = 0$ a $M = M_b \cup M_0$. Jest
$$M_0 = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x \in M_0,\ f'(x) \le k\}$$
a podle Věty 22.1 je
$$\lambda^*\big(f(\{x \in M_0,\ f'(x) \le k\})\big) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$
Tedy $\lambda^*\big(f(M_0)\big) = 0$, tedy $\lambda\big(f(M_0)\big) = 0$.

Množina $f(M_b)$ je borelovská (monotónní obraz borelovské množiny je borelovský), a tedy $f(M)$ je měřitelná. Funkce $x \mapsto f'(x)$ je limitou posloupnosti měřitelných funkcí $f_k(x) = k\left(f(x+\frac{1}{k}) - f(x)\right)$ pro $k \to \infty$, a tedy je sama měřitelná. Zvolme $\tau > 1$. Položme

$$E_k = \{x \in M;\ \tau^k \leq f'(x) < \tau^{k+1}\} \text{ pro } k \in \mathbb{Z}.$$

Podle Věty 22.1 platí $\forall k \in \mathbb{Z}$:

$$\tau^{-2} \int_{E_k} f'(x)\,dx \underset{\text{def. } E_k}{\leq} \tau^{k-1} \lambda(E_k) \underset{\text{V 22.1(a)}}{\leq} \lambda(f(E_k)) \underset{\text{V 22.1(b)}}{\leq} \tau^{k+1} \lambda(E_k) \underset{\text{def. } E_k}{\leq} \tau \int_{E_k} f'(x)\,dx.$$

Posčítáme přes $k \in \mathbb{Z}$: $\quad \tau^{-2} \int_M f'(x)\,dx \leq \lambda(f(M)) \leq \tau \int_M f'(x)\,dx$

a pošleme $\tau \to 1+$. $\square$

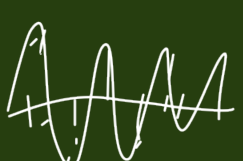
22.2. FUNKCE S KONEČNOU VARIACÍ

DEFINICE. Nechť $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$, a $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. Definujeme

$$V^+(f;a,b) = \sup_D \sum_{i=1}^n \big(f(x_i)-f(x_{i-1})\big)^+$$ (kladná variace),

$$V^-(f;a,b) = \sup_D \sum_{i=1}^n \big(f(x_i)-f(x_{i-1})\big)^-$$ (záporná variace)

$$V(f;a,b) = \sup_D \sum_{i=1}^n |f(x_i)-f(x_{i-1})|$$ (totální variace),



kde sup bereme přes všechna dělení $D=\{x_i\}_{i=0}^n$ $[a,b]$, $a=x_0<x_1<\dots<x_n=b$. Řekneme, že f má na intervalu $[a,b]$ omezenou variaci, jestliže $V(f;a,b)<\infty$. Množinu všech funkcí na $[a,b]$ s kon. variací značíme $BV([a,b])$.