K větě 4.15 $\exp(x+y) = \exp(x)\cdot\exp(y) \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$

Důkaz. Zvolme $x,y \in \mathbb{R}$. Potom

$$\exp(x+y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{n-k}}{(n-k)!} \cdot \frac{y^k}{k!}.$$ To je Cauchyův součin řad

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}$. Obě jsou AK (stačila by jedna),

a tedy dle Mertensovy věty $\exp(x+y) = \exp(x)\cdot\exp(y)$. $\square$

21.3. ZOBECNĚNÉ ŘADY

IDEA: Víme, co je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \underbrace{a_1 + a_2 + a_3 + \dots}_{\text{záleží na pořadí}}$

CHCEME sčítat přes obecné množiny

$$\sum_{\alpha \in I} x_\alpha, \quad \forall \alpha \in I: x_\alpha \in \mathbb{R}$$

POZNÁMKA I konečná, potom $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha$ má smysl

CHCEME (alespoň někdy) $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha$, I nekonečná

PŘÍKLAD $I = \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ $\sum_{m,n\in\mathbb{N}} x_{[m,n]}$, $\sum_{[m,n]\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \frac{1}{m^2+n^2} = ?$

OTÁZKA: Je-li $I=\mathbb{N}$, bude platit $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$?

PŘÍSTUP bude jiný, podobný konstrukci Leb. integrálu

Potřebujeme: x_α^+, x_α^-

ZNAČENÍ. I množina, $\mathcal{F}(I)$ ... množina všech konečných podmnožin I

DEFINICE. Nechť I je množina a $\forall \alpha \in I$ je $x_\alpha \in \mathbb{R}$. Symbol $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha$ nazveme *zobecněnou řadou*. Prvek $x \in \mathbb{R}^*$ nazveme *součtem* $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha$, jestliže $\forall \varepsilon > 0 \; \exists F \in \mathcal{F}(I) \; \forall F' \in \mathcal{F}(I), F' \supset F : \sum_{\alpha \in F'} x_\alpha \in B(x, \varepsilon)$. Potom píšeme $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha = x$ a říkáme, že $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha$ *má součet*. Je-li $x \in \mathbb{R}$, pak $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha$ je *konvergentní*. V opačném případě je *divergentní*. Je-li $\sum_{\alpha \in I} |x_\alpha|$ konvergentní, pak říkáme, že $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha$ je *absolutně konvergentní*.

PŘÍKLAD. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, pak i $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

Důkaz $\varepsilon > 0$, najdu $n_0 \in \mathbb{N}$: $\sum_{n=1}^{n_0} \frac{1}{n^2} > \frac{\pi^2}{6} - \varepsilon$, označím $F = \{1, \dots, n_0\}$.

Potom $\forall F' \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$, $F' \supset F \Rightarrow \sum_{n \in F'} \frac{1}{n^2} \in \left(\frac{\pi^2}{6} - \varepsilon, \frac{\pi^2}{6}\right)$. $\square$

PŘÍKLAD $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \log 2$

ale nikoli $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \log 2$ (cvičení)

Věta 21.7 (vlastnosti zobecněného součtu).

(a) Jestliže $\forall \alpha \in I: x_\alpha \geq 0$, pak $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha$ má součet a

$$\sum_{\alpha \in I} x_\alpha = \sup \left\{ \sum_{\alpha \in F} x_\alpha \,;\, F \in \mathcal{F}(I) \right\};$$

(b) Řady $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha^+$, $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha^-$ vždy mají součet, $\sum_{\alpha \in I} |x_\alpha|$ má součet a platí $\sum_{\alpha \in I} |x_\alpha| = \sum_{\alpha \in I} x_\alpha^+ + \sum_{\alpha \in I} x_\alpha^-$.

! (c) $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha$ má součet právě tehdy, když je $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha^+ - \sum_{\alpha \in I} x_\alpha^-$ definován a pak platí $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha = \sum_{\alpha \in I} x_\alpha^+ - \sum_{\alpha \in I} x_\alpha^-$.

DŮSLEDEK: Pro zobecněné řady je K $\iff$ AK. (!)

Věta 21.11 (spočetnost nosiče). Nechť $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ konverguje. Potom

(a) $\forall c>0$ je $\{\alpha\in I;\ |x_\alpha|>c\}$ konečná,

(b) $\{\alpha\in I;\ x_\alpha\neq 0\}$ je spočetná.

Důkaz. (a) Víme, že $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ je AK. Označme $s=\sum_{\alpha\in I}|x_\alpha|$.

Položme $I_c=\{\alpha\in I;\ |x_\alpha|\geq c\}$. Nechť $F\in\mathcal{F}(I)$. Potom

$$\underbrace{c\,|F|}_{\text{počet prvků}} = \sum_{\alpha\in F} c \leq \sum_{\alpha\in F}|x_\alpha| \leq s.$$ Tedy $|F|\leq \frac{s}{c}<\infty$.

(b) $\{\alpha\in I;\ x_\alpha\neq 0\}=\bigcup_{n=1}^{\infty} I_{\frac{1}{n}}$, tedy je spočetná. $\square$

Pozn. Toto je analogie nutné podmínky konvergence řady ($\lim a_n=0$).

Věta 21.12 (zobecněný součet na $\mathbb{N}$). Nechť $\{x_n\}$ je posloupnost.

(a) Potom $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ je konvergentní $\Longleftrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ je AK.

(b) Má-li $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ součet, pak i $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ má součet a rovnají se.

Důkaz. $x_n \geq 0$:

$$\sup\Big\{\sum_{i\in F} x_i;\ F\in\mathcal{F}(\mathbb{N})\Big\} \leq \sup\Big\{\sum_{i=1}^{\max F} x_i;\ F\in\mathcal{F}(\mathbb{N})\Big\} \leq \sup\Big\{\sum_{i=1}^{n} x_i;\ n\in\mathbb{N}\Big\}$$

$$\leq \sup\Big\{\sum_{i\in F} x_i;\ F\in\mathcal{F}(\mathbb{N})\Big\}.$$ (sendvič),

tedy $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ (Věta Věta 21.7(a)).

Obecný případ: dle V 21.9: $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ K $\Longleftrightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$ K $\Longleftrightarrow$ $\begin{pmatrix}\text{1. část}\\ \text{důkazu}\end{pmatrix}$ $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ K

$\Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ AK

a $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n^+ - \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} x_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$. Máme (a).

(b) Stačí pro nevlastní součet, např. $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n = \infty$. Zvolme $s\in\mathbb{R}$. Položme k němu nalezneme $F\in\mathcal{F}(\mathbb{N})$ $\forall F'\in\mathcal{F}(\mathbb{N})$, $F'\supset F$: $\sum_{n\in F'} x_n > s$.

$n_0 = \max F$. Potom $\forall n \geq n_0$: $F\subset\{1,\dots,n\}$, a tedy

$\sum_{i=1}^{n} x_i > s$. Tedy $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \infty$. Obdobně pro $-\infty$. $\square$

Věta 21.13 (asociativita zobecněného součtu). Nechť J je množina, $\{I_\beta;\beta\in J\}$ je systém množin splňující $I_\beta \cap I_{\beta'} = \emptyset$ $\forall \beta \neq \beta'$. Nechť $I = \bigcup_{\beta\in J} I_\beta$ a $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ konverguje. Potom $\forall \beta\in J$ konverguje $\sum_{\alpha\in I_\beta} x_\alpha$ a označme-li $y_\beta = \sum_{\alpha\in I_\beta} x_\alpha$, $\beta\in J$, potom $\sum_{\beta\in J} y_\beta$ konverguje a platí $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha = \sum_{\beta\in J} y_\beta$.

Pozn. Bez $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ konv. to neplatí! Příklad $J=\mathbb{N}$, $I=\mathbb{Z}\setminus\{0\}$, $I_\beta = \{-\beta,\beta\}$, $\beta\in J$, $x_\alpha = \alpha$, $\alpha\in I$. Potom $y_\beta = 0$ $\forall\beta\in J$. Ale $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ nemá součet.