CÍL: přerovnávání řad

DEFINICE. Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada a $\pi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je bijekce.

Potom řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}$ nazveme přerovnáním $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

OTÁZKA: za jakých podmínek $\sum a_{\pi(n)} = \sum a_n$?

konvergence nestačí: $\sum a_n = 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \dots$,

potom $\sum a_n = 0$. Ale po přerovnání

$$\sum a_{\pi(n)} = \underbrace{1 + \frac{1}{2} - 1}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}}_{\frac{1}{12}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{3}}_{\frac{1}{30}} + \dots$$

SK: $\sum a_{\pi(n)}$ konverguje, ale součet $\neq 0$.

Věta 21.1 (o přerovnání AK řady). Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konverguje a $\pi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je bijekce. Potom $\sum a_{\pi(n)}$ absolutně konverguje a $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Důkaz. Zvolme $m \in \mathbb{N}$. K němu nalezneme $n \in \mathbb{N}$ takové, že $\{1, \dots, m\} \subset \{\pi^{-1}(1), \dots, \pi^{-1}(n)\}$ (stačí $n = \max\{\pi(1), \dots, \pi(m)\}$). Potom $\{\pi(1), \dots, \pi(m)\} \subset \{1, \dots, n\}$. Tedy

$$\sum_{j=1}^{m} |a_{\pi(j)}| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |a_i|.$$

Tudíž $\sum_{j=1}^{\infty} |a_{\pi(j)}|$ konverguje.

Označme $s_n = a_1 + \dots + a_n$, $s = \lim s_n$,

$t_n = a_{\pi(1)} + \dots + a_{\pi(n)}$, $t = \lim t_n$.

Potom $s, t \in \mathbb{R}$, Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $m \in \mathbb{N}$ tak, aby $\sum_{i=m+1}^{\infty} |a_i| < \varepsilon$ & $\sum_{j=m+1}^{\infty} |a_{\pi(j)}| < \varepsilon$. Dále nalezneme $k \in \mathbb{N}$ tak, že $\{1, \dots, m\} \subseteq \{\pi^{-1}(1), \dots, \pi^{-1}(k)\}$ & $\{1, \dots, m\} \subseteq \{\pi(1), \dots, \pi(k)\}$.

Zvolme $n \geq k$. Označme

$A = \{1, \dots, n\} \setminus \{\pi(1), \dots, \pi(n)\}$, $B = \{\pi(1), \dots, \pi(n)\} \setminus \{1, \dots, n\}$.

Potom $A \subset \{i \in \mathbb{N}, i \geq m+1\}$, $B \subset \{\pi(j), j \geq m+1\}$. Tedy

$$|s_n - t_n| = \left| \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{j=1}^{n} a_{\pi(j)} \right| = \left| \sum_{i \in A} a_i - \sum_{j \in B} a_{\pi(j)} \right|$$

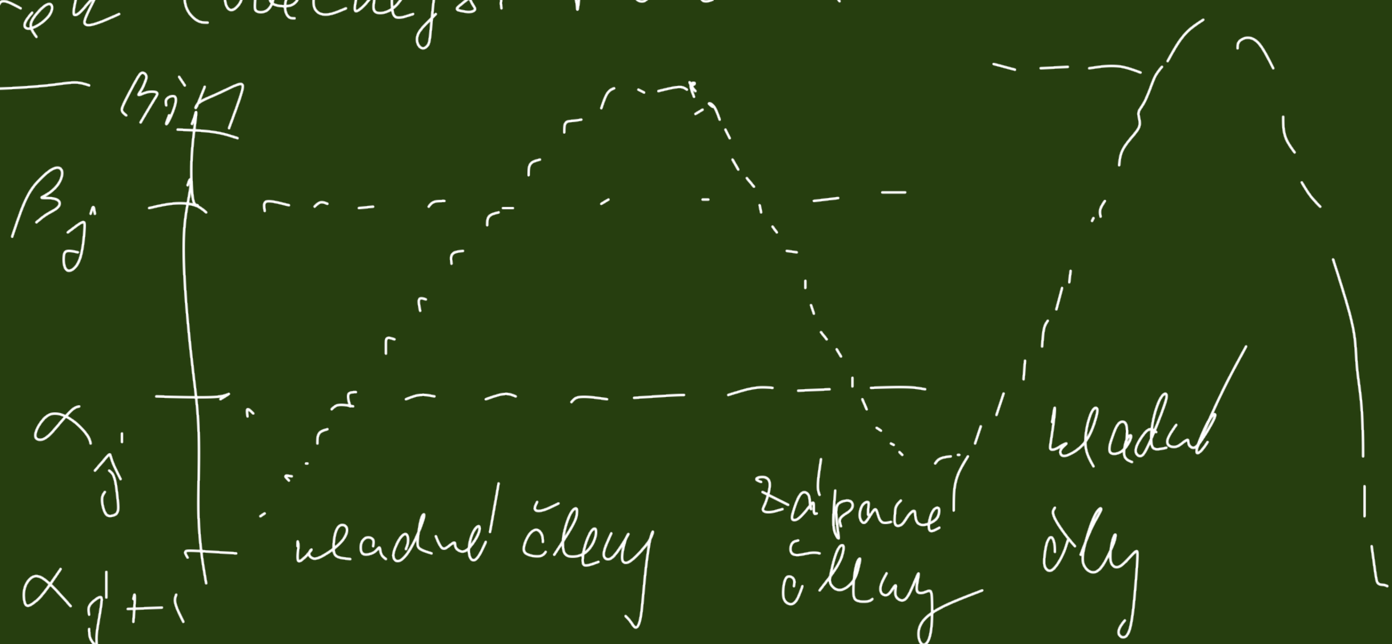
$$\leq \sum_{i \in A} |a_i| + \sum_{j \in B} |a_{\pi(j)}| \leq \sum_{i=m+1}^{\infty} |a_i| + \sum_{j=m+1}^{\infty} |a_{\pi(j)}| < 2\varepsilon.$$ Tedy $s = t$. $\square$

Věta 21.2 (Riemann). Nechť $\sum a_n$ je neabsolutně konvergentní řada a $s \in \mathbb{R}^*$. Potom existuje bijekce $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ taková, že $\sum a_{\pi(n)} = s$.

Důkaz – cvičení

návod: **1. krok** $\sum a_n$ NAK $\Rightarrow \sum a_n^+ = \infty$ & $\sum a_n^- = \infty$

2. krok (obecnější tvrzení): $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$, $\alpha \le \beta$, $\alpha_j \to \alpha$, $\beta_j \to \beta$



$\Rightarrow \liminf \sum a_{\pi(n)} = \alpha$

$\limsup \sum a_{\pi(n)} = \beta$. □

21.2. SOUČIN ŘAD

Pro $a_1,\dots,a_n,\ b_1,\dots,b_m \in \mathbb{R}$ jest

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{m} b_j\right) = \sum_{(i,j)\in\{1,\dots,n\}\times\{1,\dots,m\}} a_i b_j$$

Jak to udělat pro nekonečné řady?

Chceme posčítat členy tvaru $a_n b_m$, $n, m \in \mathbb{N}$.

V jakém pořadí? Možností je více. Mezi nejdůležitější patří Cauchyův součin, založený na myšlence:

$$\begin{array}{cccc}
a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \cdots \\
a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 & \cdots \\
a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots \quad a_nb_m
\end{array}$$

DEFINICE. *Cauchyovým součinem* řad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$

rozumíme řadu $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$, kde $c_k = \sum_{i=1}^{k} a_{k+1-i} \cdot b_i$, $k \in \mathbb{N}$.

OTÁZKA: $\sum a_n, \sum b_m$ K $\overset{?}{\Rightarrow} \sum c_k$ K $\qquad$ **NE**

PŘ. $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, $b_m = \frac{(-1)^m}{\sqrt{m}}$, pak $\sum a_n, \sum b_m$ K, ale

$$c_k = \sum_{i=1}^{k} \frac{(-1)^{k+1-i}}{\sqrt{k+1-i}} \cdot \frac{(-1)^i}{\sqrt{i}} = (-1)^{k+1} \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{k+1-i} \cdot \sqrt{i}}$$

AG: $\sqrt{k+1-i} \cdot \sqrt{i} \leq \frac{k+1}{2}$, a tedy $|c_k| \geq \sum_{i=1}^{k} \frac{2}{k+1} = \frac{2k}{k+1}$,

tedy $c_k \not\to 0$, a tedy $\sum c_k$ diverguje.

Věta 21. 3 (Mertens). Nechť $\sum a_n$ absolutně konverguje a $\sum b_n$ konverguje. Potom je jejich Cauchyův součin konvergentní řada, jejíž součet je roven $\left(\sum a_n\right)\cdot\left(\sum b_n\right)$.

Důkaz. Pro $k \in \mathbb{N}$ označme

$$A_k = \sum_{j=1}^{k} a_j, \quad A = \sum_{j=1}^{\infty} a_j, \quad \tilde{A} = \sum_{j=1}^{\infty} |a_j|, \quad B_k = \sum_{j=1}^{k} b_j, \quad B = \sum_{j=1}^{\infty} b_j,$$

$$\beta_k = B_k - B, \quad c_k = \sum_{i=1}^{k} a_{k+1-i}\, b_i, \quad C_k = \sum_{j=1}^{k} c_j. \text{ Potom}$$

pro $k \in \mathbb{N}$: $C_k = a_1 b_1 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) + \dots + (a_1 b_k + \dots a_k b_1) =$

$= a_1 B_k + a_2 B_{k-1} + \dots + a_k B_1 = a_1(B+\beta_k) + \dots + a_k(B+\beta_1)$

$= A_k B + a_1\beta_k + \dots + a_k \beta_1$. Označme $\gamma_k = a_1\beta_k + \dots + a_k\beta_1$.

CHCEME: $\lim \gamma_k = 0$. Pak totiž

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k = \lim_{k\to\infty} C_k = \lim (A_k B + \gamma_k) = AB.$$

Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $k_0 \in \mathbb{N}: \forall k \geq k_0: |\beta_k| < \varepsilon$.

(TO LZE, NEBOŤ $\sum b_m$ K.) Potom pro $k \geq k_0$ platí

$$|\gamma_k| = \left|\sum_{j=1}^{k} a_{k+1-j}\beta_j\right| = \left|\sum_{j=1}^{k_0} + \sum_{j=k_0+1}^{k}\right| \leq \left|\sum_{j=1}^{k_0} \cdots\right| + \underbrace{\sum_{j=k_0+1}^{k} |a_{k+1-j}| \cdot \underbrace{|\beta_j|}_{<\varepsilon}}_{<\varepsilon \cdot \tilde{A}}$$

Tedy

$$|\gamma_k| \leq \left|\sum_{j=1}^{k_0} a_{k+1-j}\beta_j\right| + \varepsilon \tilde{A}.$$

Nutná podm. konvergence nám dává: $\lim_{k\to\infty} a_{k+1-j} = 0 \ \forall j \in \{1, \dots, k_0\}$

Tedy $\lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{k_0} a_{k+1-j}\beta_j = 0$. Odtud:

$$\limsup |\gamma_k| \leq \limsup \left|\sum_{j=1}^{k_0} a_{k+1-j}\beta_j\right| + \varepsilon \tilde{A} = \varepsilon \tilde{A}.$$ Tedy $\limsup |\gamma_k| = 0$,

tedy $\lim |\gamma_k| = 0$, a tedy $\lim \gamma_k = 0$. $\square$

DŮSLEDEK. $\sum a_n, \sum b_m$ AK $\Rightarrow \sum c_k$ AK

Důkaz. $$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k| = \sum_{k=1}^{\infty} \left| \sum_{i=1}^{k} a_{k+1-i} b_i \right|$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{k} |a_{k+1-i}| \cdot |b_i|,$$

což je Cauchyův součin $\sum |a_n|, \sum |b_m|,$

a ten konverguje podle Mertensovy věty.

$\square$

Věta 21.4 (Abelova o Cauchyově součinu). Nechť $\sum a_n, \sum b_m$ a jejich Cauchyův součin $\sum c_k$ konvergují. Potom $\sum c_k = \left(\sum a_n\right)\left(\sum b_m\right)$.

Důkaz. Položme $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, $g(x) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m x^m$.

Potom poloměr konvergence obou řad je ≥ 1. Tedy $\forall x \in (-1,1)$ jsou obě AK a $\forall x \in [0,1)$ platí (dle Mertense)

$$f(x)g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{k} a_{k-i+1} x^{k-i+1} b_i \cdot x^i$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{k} a_{k-i+1} b_i x^{k+1}.$$ Tedy $(x \to 1-)$ z Abelovy věty plyne

$$\lim_{x \to 1-} f(x)g(x) = \left(\sum a_n\right)\left(\sum b_m\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{k} a_{k-i+1} b_i \quad . \quad \square$$