Důkaz Věty 20.14 (a) ✓

(b) chceme: $\varphi'(a)(\mathbb{R}^k) = T_x(M)$

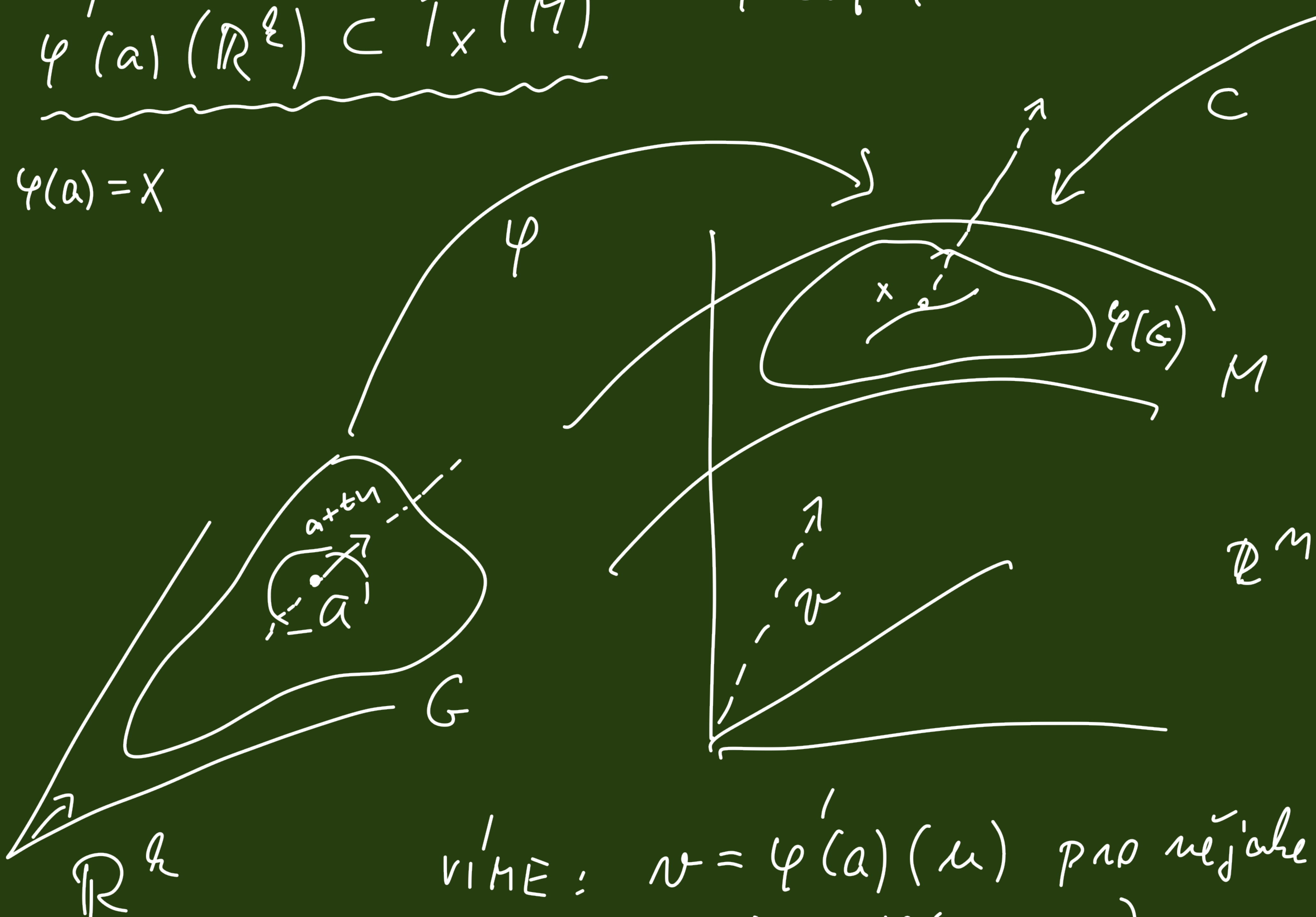
$c(t_0) = x$

$c'(t_0) = v$

předp., že $v \in \varphi'(a)(\mathbb{R}^k)$

$\varphi'(a)(\mathbb{R}^k) \subset T_x(M)$

$\varphi(a) = x$



$$\begin{array}{c} k \\ \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_k} \\ & \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_k} \end{pmatrix} \; n \end{array}$$

VÍME: $v = \varphi'(a)(u)$ pro nějaké $u \in \mathbb{R}^k$

IDEA: $c(t) = \varphi(a + tu)$

Nalezneme δ: $B(a,\delta) \subset G$, $r > 0$: $r\|u\| < \delta$,

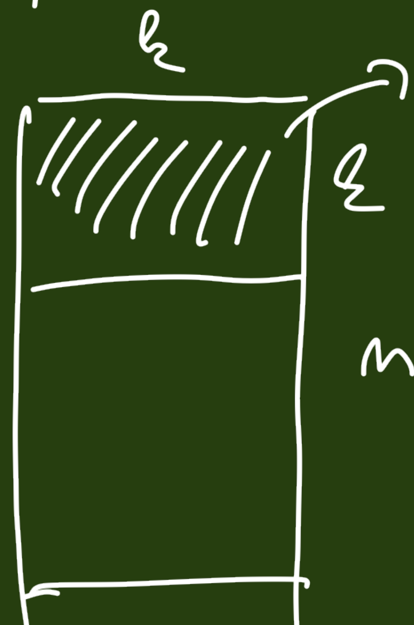
Položme $I = (-r, r)$, $c : t \mapsto c(t) = \varphi(a+tu)$, $t \in I$, $t_0 = 0$

Potom $c : I \to M$ a $c'(0) = \varphi'(a)(u) = v$. Navíc $c(0) = \varphi(a) = x$

$T_x(M) \subset \varphi'(a)(\mathbb{R}^k)$. Zvolme $v \in T_x(M)$.

Tedy $\exists I$, $t_0 \in I$, $c : I \to M$ spojité, $c(t_0) = x$, $c'(t_0) = v$.

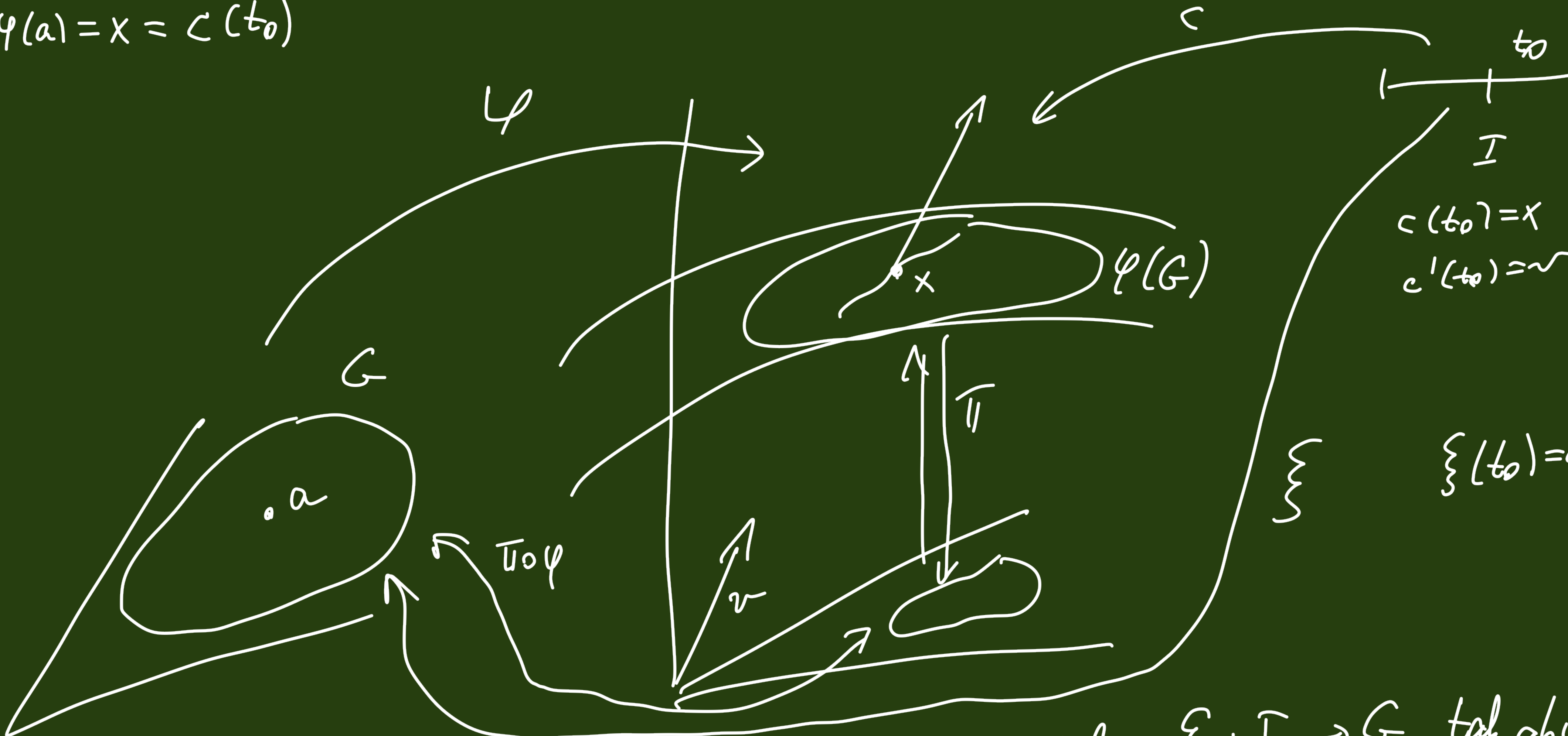
$\varphi'(a)$



$\operatorname{rank} \varphi'(a) = k$

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_k}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_1}(a) & & \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_k}(a) \end{pmatrix}$$

$\varphi(a) = x = c(t_0)$



$c(t_0) = x$
$c'(t_0) = v$

$\xi(t_0) = a$

Kde vzít $u \in \mathbb{R}^k$: $v = \varphi'(a)(u)$?

IDEA: def. $\xi : I \to G$ tak, aby

$c = \varphi\circ\xi$, $\xi(t_0) = a$, pak $v = c'(t_0) = (\varphi\circ\xi)'(t_0) = \varphi'(\xi(t_0))\cdot\underbrace{\xi'(t_0)}$

$= \varphi'(a)(u) \; (\in \mathbb{R}^k)$

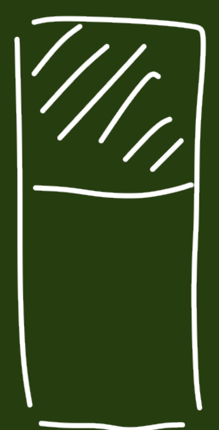
Jak dokázat, že $\exists\, \xi'(t_0)$?

IDEA

$\xi'(t_0) = (\varphi^{-1}\circ c)'(t_0) \overset{?}{=} \underbrace{\underbrace{(\varphi^{-1})'(c(t_0))}\cdot\underbrace{c'(t_0)}_{v}}_{\text{NEEX.!}}$

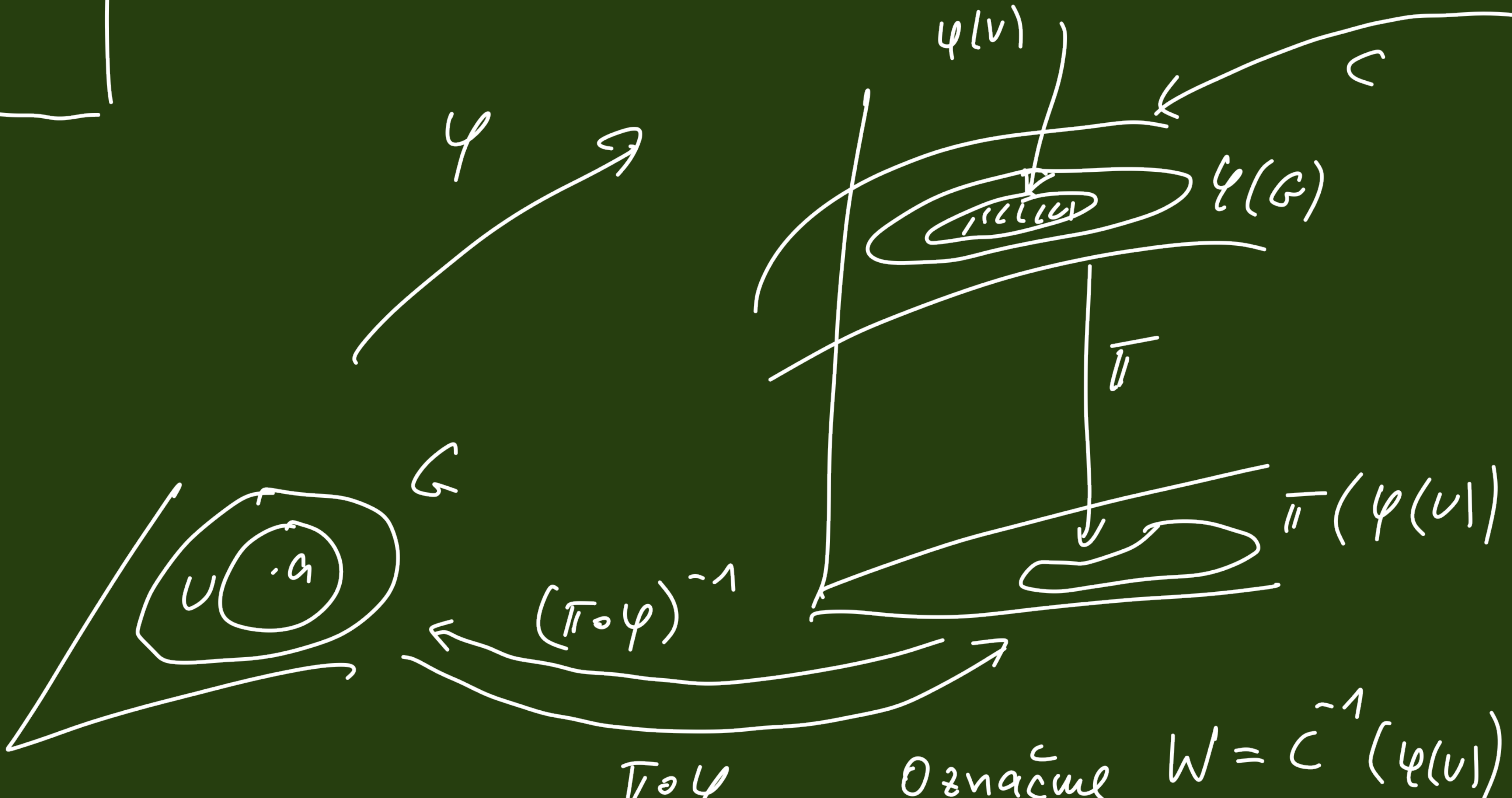
Označme $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^\ell$, $\pi(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_\ell)$, $x \in \mathbb{R}^n$. Potom

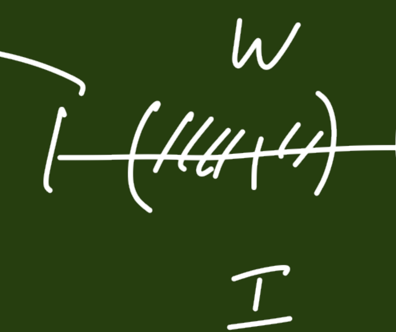
$(\pi \circ \varphi)'(a) = \pi'(\varphi(a)) \circ \varphi'(a) = \pi \circ \varphi'(a) = A$ -- regulární



Tedy $(\pi\circ\varphi) \in \mathcal{C}^1(G)$ a $(\pi\circ\varphi)'(a)$ je reg., $\pi\circ\varphi : G \to \mathbb{R}^\ell$.

Podle VOLD $\exists U \subset G$ okolí a : $\pi\circ\varphi|_U$ je difeomorfismus.





$\pi|_{\varphi(U)}$ je prosté (neboť $\pi\circ\varphi$ je prosté na U)

Označme $W = C^{-1}(\varphi(U))$.

Označme $W = c^{-1}(\varphi(U))$. Pretože $\varphi^{-1} : M \to \mathbb{R}^k$ je spojité a $U \subset \mathbb{R}^k$ je ot., $\varphi(U)$ ot. v M. Tedy W je otvorené (c je spojité). Naviac $t_0 \in W$, nebot' $c(t_0) = x = \varphi(a)$. Položme $\xi : W \to G$, $\xi(t) = \varphi^{-1}(c(t))$, $t \in W$. Potom $c|_W = \varphi \circ \xi$, $\xi(t_0) = a$ a

$$\xi(t) = \varphi^{-1} \circ \left(\pi|_{\varphi(U)} \right)^{-1} \circ \left(\pi|_{\varphi(U)} \right) \circ c(t)$$

$$= \left(\pi \circ \varphi|_U \right)^{-1} \circ \pi(c(t)), \quad t \in W.$$

Potom ξ je spojité na W. Naviac existuje $\xi'(t_0)$, nebot'

$$\xi'(t_0) = \left((\pi \circ \varphi)^{-1} \right)' \left((\pi \circ c)(t_0) \right) \circ (\pi \circ c)'(t_0)$$

$$= \left((\pi \circ \varphi)^{-1} \right)' \left(\pi(x) \right) \circ \pi'(c(t_0)) \circ c'(t_0)$$

$$= \left((\pi \circ \varphi)^{-1} \right)' \left(\pi(x) \right) \circ \pi(v).$$

existuje, $\in \mathbb{R}^k$, označme $u = \xi'(t_0)$

Potom $v = c'(t_0) = (\varphi \circ \xi)'(t_0) = \varphi'(\xi(t_0)) \circ \xi'(t_0) = \varphi'(a)(u)$,

takže $v \in \varphi'(a)(\mathbb{R}^\ell)$.

$\square$

20.5. HLAVNÍ VĚTA TEORIE POLE

u potenciál f:

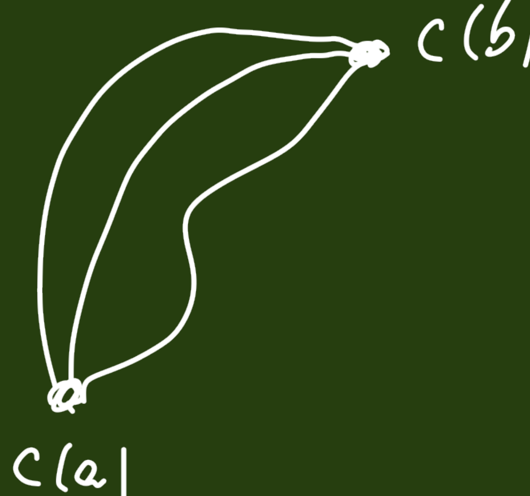
$Du = f$ $\quad u: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

CÍL: nalézt vztahy mezi:

- existencí potenciálu pole f
- nevírovosti $(\operatorname{curl} f = 0)$
- nezávislosti křivkového integrálu „na cestě"

Věta 20.24 (o potenciálu). Nechť $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otevřená, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $c: [a,b] \to \Omega$ je po částech regulární křivka, $u: \Omega \to \mathbb{R}$, $u \in \mathcal{C}^1(U)$. Potom

$$u(c(b)) - u(c(a)) = \int_c Du \cdot dc .$$



Důkaz. Jest

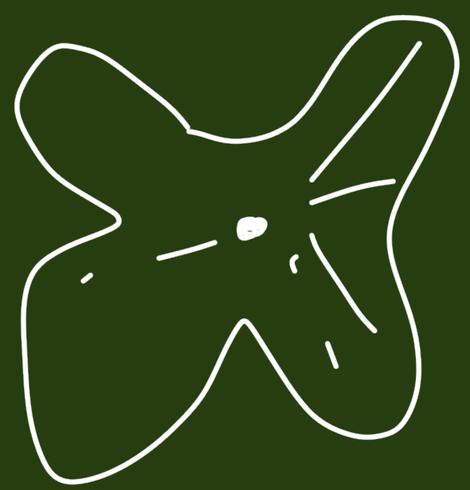
$$(u\circ c)(b)-(u\circ c)(a)\overset{\text{PČR}}{=}\int_a^b (u\circ c)'(t)\,dt \overset{\text{ŘP}}{=} \int_a^b \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}(c(t))\,c_i'(t)\,dt$$

$$=\int_a^b \langle \nabla u(c(t)),\, c'(t)\rangle\,dt = \int_c \nabla u\cdot dc. \qquad \square$$

DEFINICE. Nechť $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ otevřená, $f:\Omega\to\mathbb{R}^n$, $u:\Omega\to\mathbb{R}$. Řekneme, že u je potenciál f na Ω, jestliže $\forall x\in\Omega: \nabla u(x)=f(x)$. Vektorové pole, které má potenciál, nazýváme potenciální.

DEFINICE. Nechť $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $U \subset \mathbb{R}^n$. Řekneme, že U je **hvězdicovitá**, jestliže $\exists a \in U \ \forall x \in U : \{a + t(x-a) ; t \in [0,1]\} \subset U$.

Bod a se nazývá **střed hvězdicovitosti** U.



<u>Věta 20.25</u> (hlavní věta teorie pole). Nechť $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená a $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ je spojité. Uvažujme výroky:

(i) f je potenciální;

(ii) $\forall$ po částech reg. křivky $c_1, c_2 : [a,b] \to \Omega$, splňující $c_1(a) = c_2(a)$, $c_1(b) = c_2(b)$ platí $\int_{c_1} f \cdot dc_1 = \int_{c_2} f \cdot c_2$;

(iii) $\forall i,j \in \{1, \dots, n\}$ $\forall x \in \Omega$: $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x)$.

Potom

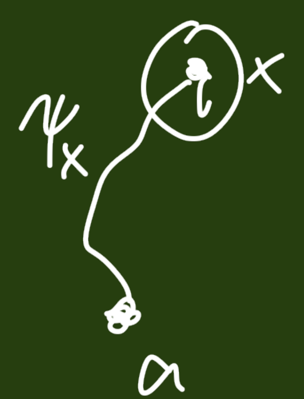
(a) (i) $\iff$ (ii)

(b) je-li $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, pak (i) $\implies$ (iii)

(c) je-li $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ a Ω je hvězdicovitá, pak (iii) $\implies$ (i).

Důkaz. (i) $\Rightarrow$ (ii) plyne z věty 20.24.

(ii) $\Rightarrow$ (i) BÚNO $\Omega \neq \emptyset$. Nechť W je komponenta Ω. Potom W je otevřená v $\mathbb{R}^n$. Zvolme $a \in W$. Dokážeme: $\forall x \in W$ $\exists$ po částech reg. křivka $\psi_x : [0,1] \to W$, $\psi_x(0) = a$, $\psi_x(1) = x$. Položme



$$G = \{x \in W,\ \exists\, \psi_x\}.$$

Potom $G \neq \emptyset$ (snadno z otevřenosti W)

Dokážeme, že je uzavřená i otevřená.

Zvolme $x \in G$. K němu máme ψ_x. Nalezneme $r > 0 : B(x,r) \subset W$.
Zvolme $y \in B(x,r)$, položme

$$\psi_y(t) = \begin{cases} \psi_x(2t), & t \in [0, 1/2] \\ x + (y-x)(2t-1), & t \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

Potom ψ_y je PČR, $\psi_y([0,1]) \subset W$ díky konvexitě $B(x,r)$, $\psi_y(0) = a$, $\psi_y(1) = y$. Tedy $y \in G$, tj. $B(x,r) \subset G$, tj. G je otevřená.

Zvolme $\{x_n\} \subset G$, $x_n \to x \in W$. Najdu $r>0$: $B(x,r) \subset W$,

najdu n_0: $x_{n_0} \in B(x,r)$, def $\varphi_x(t) = \begin{cases} \varphi_{n_0}(2t) & [0,1/2] \\ x_{n_0} + (x - x_{n_0})(2t-1) & t \in [1/2,1] \end{cases}$

Potom -- vše OK $\Rightarrow x \in G \Rightarrow G$ uz.

Tedy G je ot. uz. $\neq \emptyset \Rightarrow G = W$. Máme pomocné tvrzení.

Pro $x \in W$ položme $u(x) = \int_{\varphi_x} f \cdot d\varphi_x$. Definice je korektní.

Zvolme $i \in \{1, \dots, n\}$ a podle právě dokázaného tvrzení a (ii). Zvolme $i \in \{1,\dots,n\}$ a $x \in W$. Nalezneme $r>0$: $B(x,r) \subset W$. Pro $t \in (-r, r)$ platí

$$u(x + te^i) - u(x) = \int_\gamma f \cdot d\gamma, \text{ kde } \gamma(s) = x + s t e^i.$$

Potom $\dfrac{u(x+te^i)-u(x)}{t} = \dfrac{1}{t}\displaystyle\int_0^1 \langle f(\gamma(s)), \gamma'(s)\rangle \, ds$

$= \dfrac{1}{t}\displaystyle\int_0^1 t \cdot f_i(\gamma(s))\, ds = \int_0^1 f_i(\gamma(s))\, ds = \int_0^1 f_i(x+ste^i)\, ds.$

Tedy

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = \lim_{t\to 0} \int_0^1 f_i(x+ste^i)\, ds = \int_0^1 f_i(x)\, ds$$

$$= f_i(x).$$

Takže $u \in C^1(W)$ a $Du = f$.

(b) Plyne z věty o záměně derivací! $(u \in C^2)$