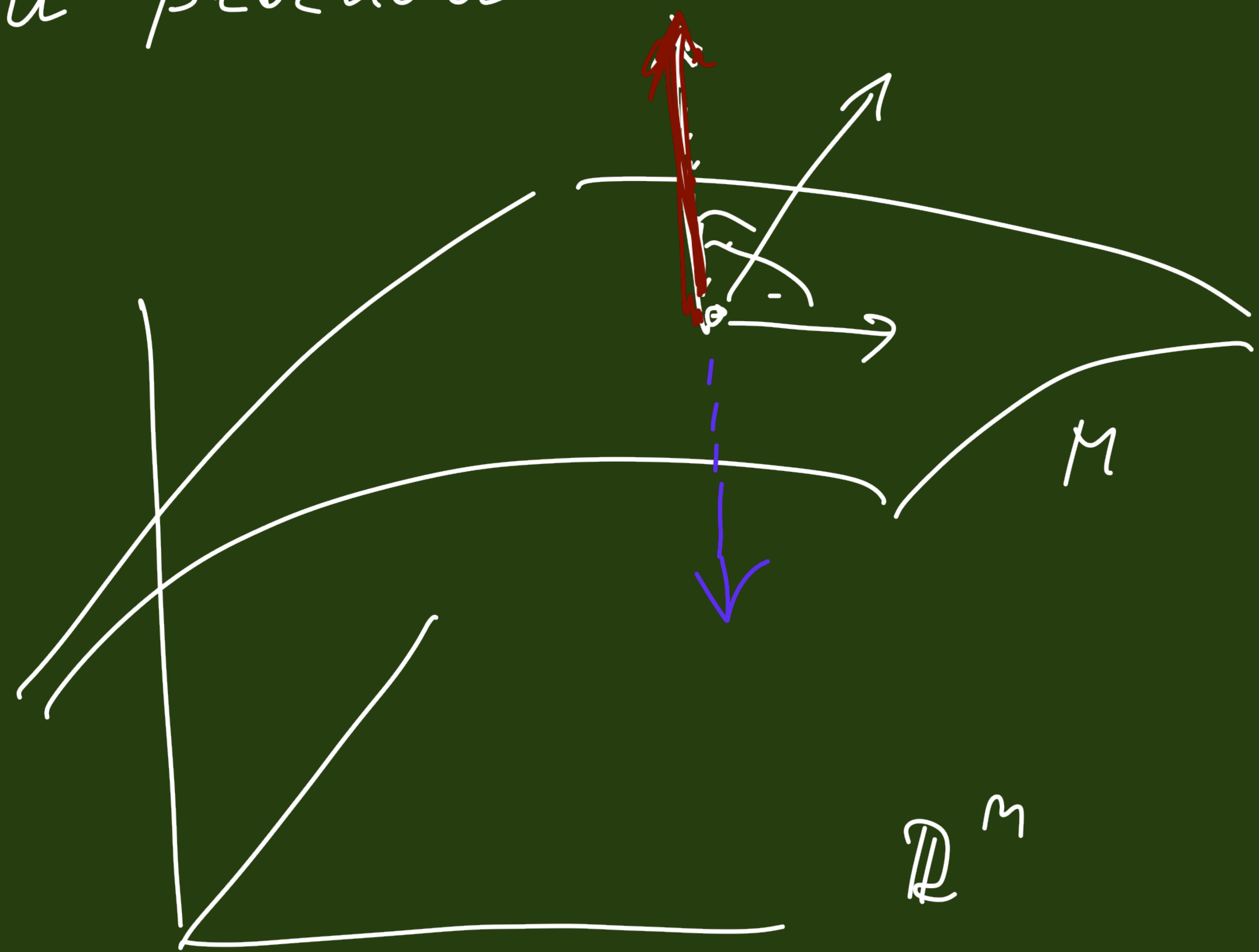
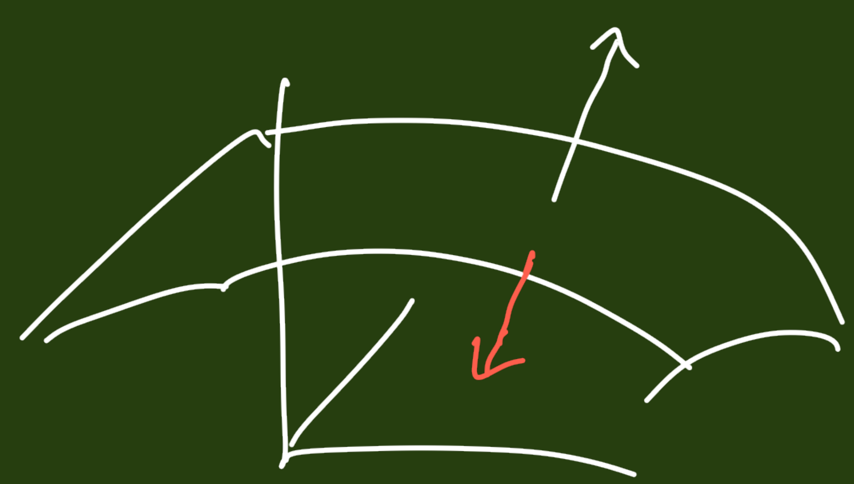
CÍL: výpočet toku vektorového pole orientovanou plochou

normálový vektor k $(n-1)$-ploše



DEFINICE. Nechť $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, M je $(n-1)$-plocha v $\mathbb{R}^n$, $x \in M$ a $v \in \mathbb{R}^n$. Řekneme, že v je *normálový vektor* k M v x, jestliže $v \in T_x(M)^\perp$.

Jestliže navíc $\|v(x)\| = 1$, pak říkáme, že v je *jednotkový normálový vektor* k M v x.

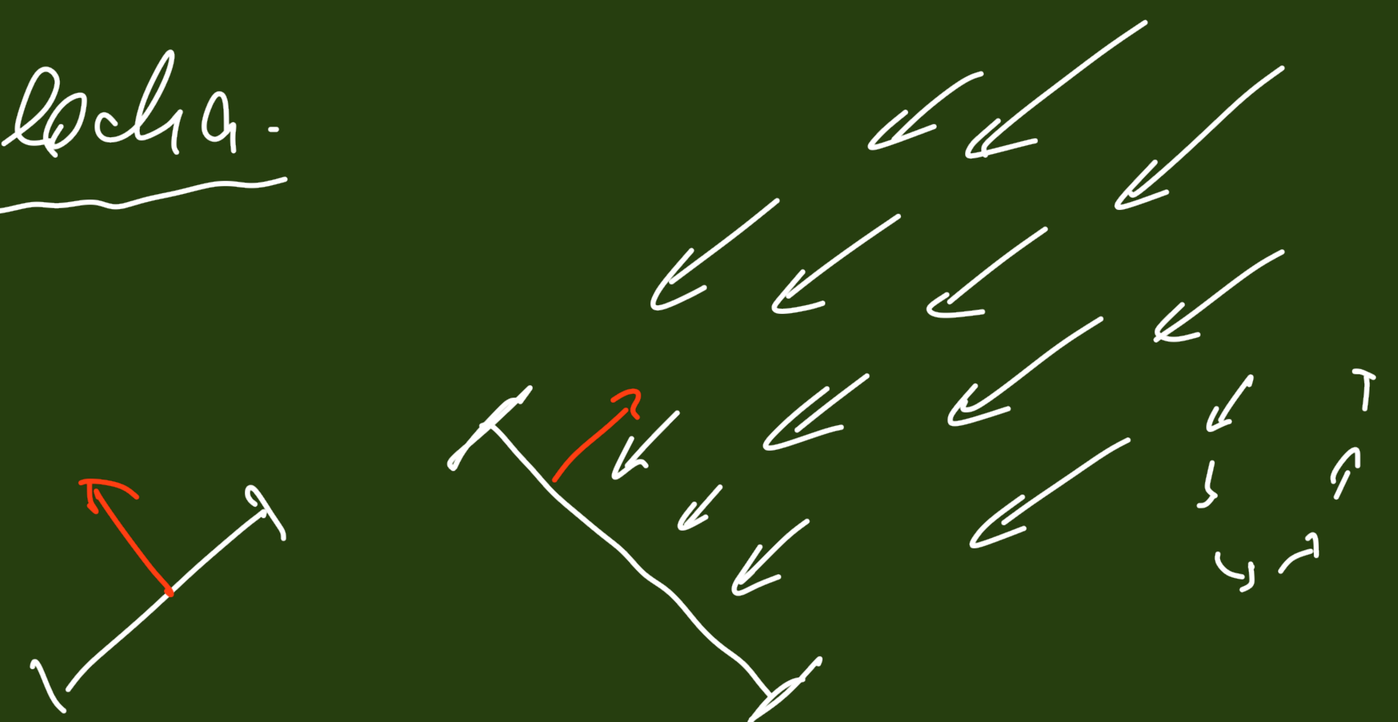


POZNÁMKA. Nechť $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, M je $(n-1)$-plocha v $\mathbb{R}^n$, $x \in M$, $G \subset \mathbb{R}^{n-1}$ je otevřená, $a \in G$, $\varphi : G \to \mathbb{R}^n$ je regulární homeomorfismus, $\varphi(a) = x$, $\varphi(G) \subset M$ a $\varphi(G)$ je otevřená v M. Potom

$$\nu(x) = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(a) \times \dots \times \frac{\partial \varphi}{\partial x_{n-1}}(a)}{\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(a) \times \dots \times \frac{\partial \varphi}{\partial x_{n-1}}(a) \right\|}$$

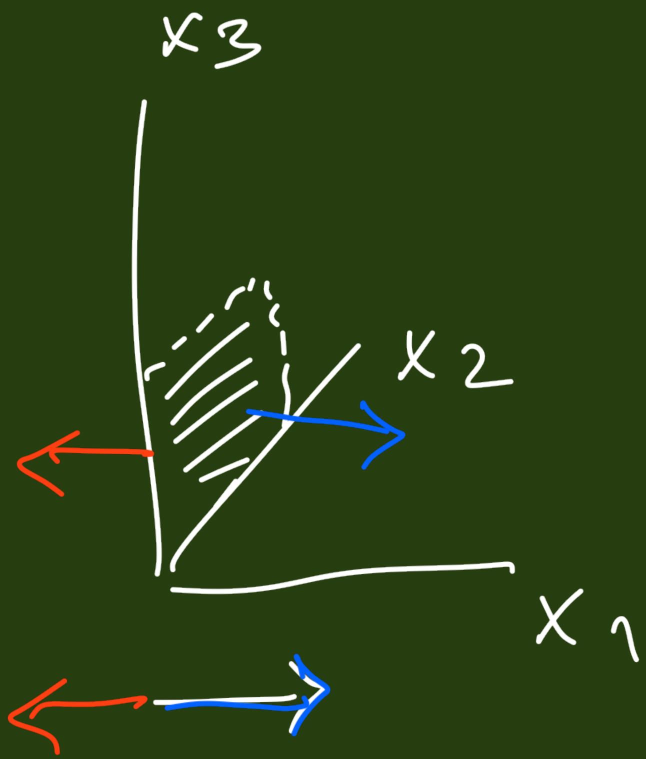
je jednotkový normálový vektor k x v M. Zobrazení ν je spojité na okolí množině v M obs. x

DEFINICE. Nechť $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, M je $(n-1)$-plocha v $\mathbb{R}^n$, $\nu : M \to \mathbb{R}^n$ je spojité zobrazení splňující $\nu(x) \in T_x(M)^\perp$ a $\|\nu(x)\| = 1$ pro každé $x \in M$. Potom se ν nazývá ***orientace*** M. Jestliže pro M existuje orientace, pak říkáme, že M je ***orientovatelná*** a dvojice (M, ν) se nazývá ***orientovaná plocha***.



PŘÍKLAD. Pro 2-plochu $M = \{0\} \times (0,1)^2$ v $\mathbb{R}^3$ nalezněte nějakou orientaci.

Řešení. $G \subset \mathbb{R}^2$: $G = (0,1)^2$, $\varphi : G \to \mathbb{R}^3$, $\varphi(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$



$$\varphi'(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \forall x \in G$$

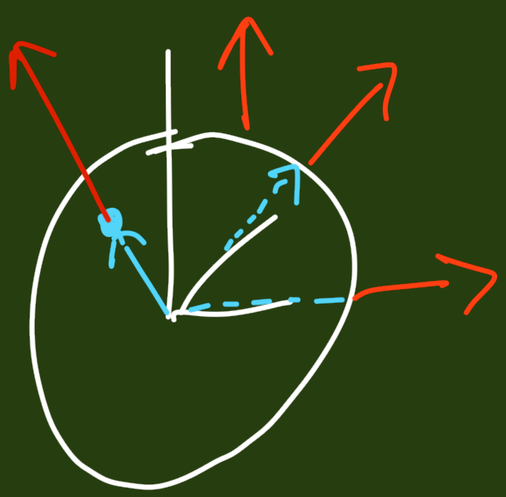
dle Poznámky:

$$\nu(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\nu}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

PŘÍKLAD. Nechť $r>0$. Pro 2-plochu $S(0,r)$ v $\mathbb{R}^3$ nalezněte nějakou orientaci.

Řešení.



$$x = \varphi(\alpha,\gamma) = \begin{pmatrix} r\cos\gamma\cos\alpha \\ r\cos\gamma\sin\alpha \\ r\sin\gamma \end{pmatrix} \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial\gamma}$$

$$v(x) = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\right) \times \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\gamma}\right) = \begin{pmatrix} r^2\cos^2\gamma\cos\alpha \\ r^2\cos^2\gamma\sin\alpha \\ r^2\cos\gamma\sin\gamma \end{pmatrix}$$

Tedy $v(x) = r\cos\gamma \cdot x$, po vynormování

$$v(x) = \frac{r\cos\gamma\cdot x}{\|r\cos\gamma\cdot x\|} = \frac{r\cos\gamma\cdot x}{r\cos\gamma\cdot r} = \frac{x}{r}.$$

PŘÍKLAD. *Möbiova páska* je množina $M \subset \mathbb{R}^3$ splňující

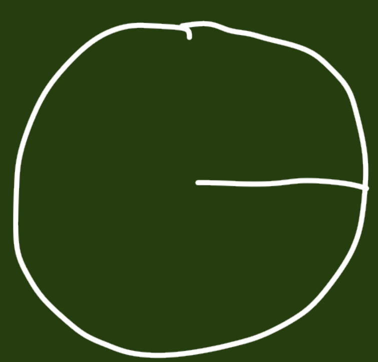
$M = \varphi(G)$, kde $G = (0, \frac{1}{2}) \times \mathbb{R}$ a $\varphi : G \to \mathbb{R}^3$ je def. předp.

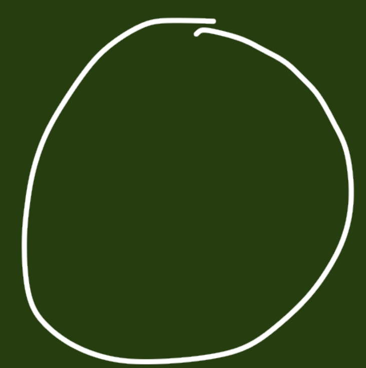
$$\varphi(r, \alpha) = \left(\cos\alpha + r\cos\frac{\alpha}{2}\cos\alpha,\ \sin\alpha + r\cos\frac{\alpha}{2}\sin\alpha,\ r\sin\frac{\alpha}{2} \right).$$

Dokažte, že M je 2-plocha v $\mathbb{R}^3$, která není

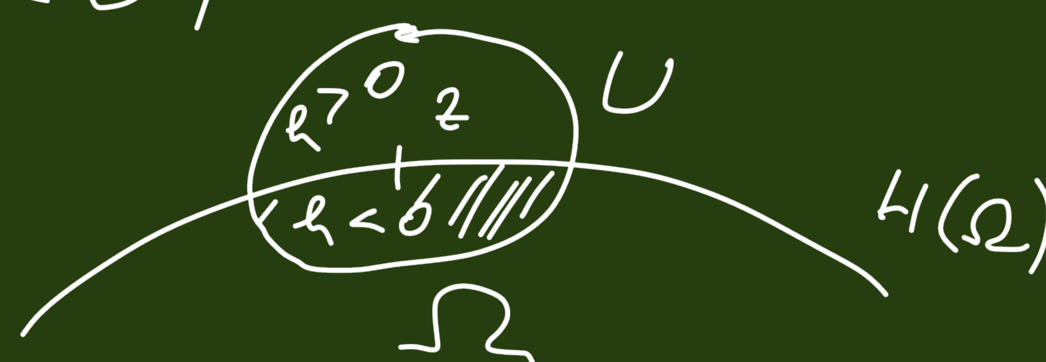
orientovatelná.

CÍL: Lokální popis hranice otevřené množiny v $\mathbb{R}^n$.





DEFINICE. Nechť $n\in\mathbb{N}$, $n>1$, $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ je otevřená, $z\in H(\Omega)$, U je okolí z a $h: U\to\mathbb{R}$. Řekneme, že h je *rozhraničující* pro Ω na U, jestliže $h\in C^1(U)$, $\nabla h(z)\neq 0$ a $U\cap\Omega=\{x\in U;\ h(x)<0\}$.



Věta 20.15 (lokální popis hranice). Nechť $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otevřená, $z \in H(\Omega)$, U je okolí z a h je rozhraničující funkce pro Ω na U. Potom

(a) existuje okolí $V \subset U$ bodu z takové, že $V \cap H(\Omega)$ je $(n-1)$-plocha v $\mathbb{R}^n$,

(b) $\nu_\Omega(z) = \dfrac{\nabla h(z)}{\|\nabla h(z)\|}$ je jednotkový normálový vektor v z k $V \cap H(\Omega)$ a nezávisí na volbě rozhraničující funkce h.

CÍL: regulární body hranice

DEFINICE. Nechť $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená a $z \in H(\Omega)$. Řekneme, že z je regulární bod $H(\Omega)$, jestliže existuje rozhraničující funkce pro Ω na nějakém okolí z.

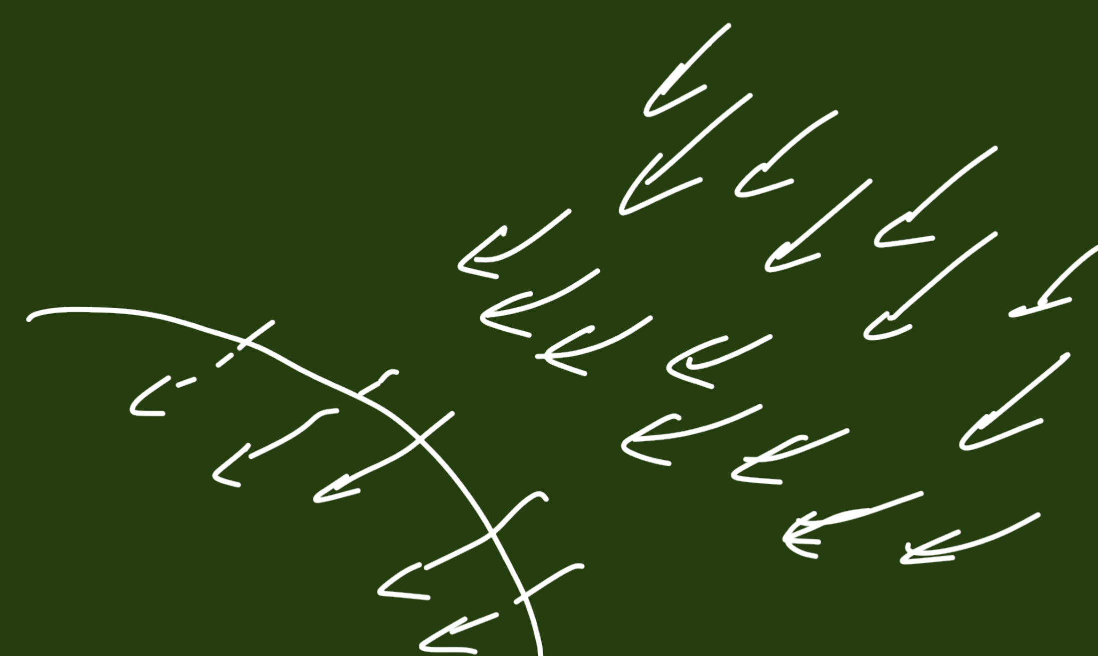
Vektor $\nu_\Omega(z)$ nazýváme vnějším jednotkovým normálovým vektorem k Ω v z. Množinu všech regulárních bodů $H(\Omega)$ značíme $H_*(\Omega)$.

20.4. GAUSSOVA, GREENOVA A STOKESOVA VĚTA

DEFINICE. Nechť $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, $M \subset \mathbb{R}^n$ je $(n-1)$-plocha orientovaná normálovým polem ν a $f : M \to \mathbb{R}^n$. Tok vektorového pole f orientovanou plochou (M, ν) definujeme předpisem

$$\int_M \langle f(y), \nu(y) \rangle \, d\mathcal{H}^{n-1}(y),$$

pokud integrál konverguje.



__DEFINICE.__ Nechť $n \in \mathbb{N}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, $f : U \to \mathbb{R}^n$, $f \in C^1(U)$. Potom pro $x \in U$ definujeme *divergenci* vektorového pole f v x předpisem

$$\operatorname{div} f(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x).$$

$\operatorname{div} > 0$ $\quad$ $\operatorname{div} < 0$ $\quad$ div –

m