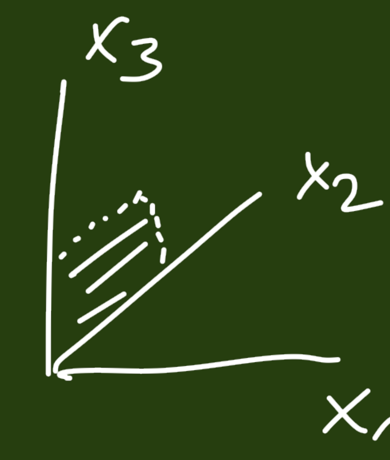
PŘÍKLAD. Dokažte, že $M = \{0\} \times (0,1)^2$ je 2-plocha v $\mathbb{R}^3$.

Řešení! Položme $G = (0,1)^2$ a $\varphi : G \to \mathbb{R}^3$ definujme předpisem

$$\varphi(x) = \varphi(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Potom



- G je ot. v $\mathbb{R}^2$ ✓
- φ je prosté, $\varphi \in C^1(G)$, $\varphi(G) = M$ ✓
- $\varphi^{-1} : M \to G$, $\varphi^{-1}(y) = \varphi^{-1}(y_1, y_2, y_3) = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, $y \in M$, tedy φ^{-1} je spojité, takže φ je homeomorfismus G na M. ✓
- zvolme $x \in G$, pak $\varphi'(x) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x), \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(x) \right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, tedy $\operatorname{rank} \varphi'(x) = 2$. ✓

Tedy φ je reg. Podle Poznámky je M 2-plocha v $\mathbb{R}^3$.

CÍL: dokázat, že sféra je 2-plocha v $\mathbb{R}^3$.

K TOMU: měli jsme „skoro popis" $S(0,r)$ pomocí sférických souřadnic,

zvolíme jiný popis (universálnější) pomocí úrovňové množiny a provedeme to rovnou pro $\mathbb{R}^n$.

Položme $S_n(0,r) = \{x \in \mathbb{R}^n;\ \|x\| = r\}$

($r > 0$ dáno, $n \in \mathbb{N}$).

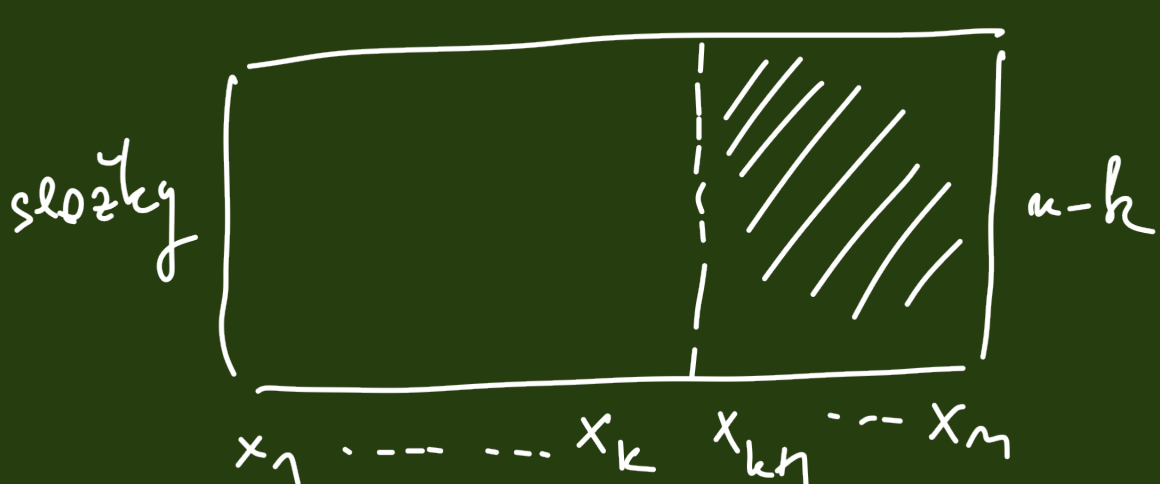
Definujme zobrazení $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ předpisem

$$F(x) = \|x\| - r \qquad (r>0 \text{ dáno}).$$

Potom $$S_n(0,r) = \{x \in \mathbb{R}^n;\ F(x)=0\} = F^{-1}(\{0\}).$$

Věta 20.13 (o úrovňové množině). Nechť $k, m \in \mathbb{N}$, $k < m$, $H \subset \mathbb{R}^m$ otevřená, $F : H \to \mathbb{R}^{m-k}$, $F \in C^1(H)$. Označme $M = \{x \in H; F(x) = 0\}$. Jestliže $M \neq \emptyset$ a $\forall x \in M$: rank $F'(x) = m-k$, potom M je k-plocha.

Důkaz. Zvolme $\tilde{x} \in M$, potom rank $F'(\tilde{x}) = m-k$.



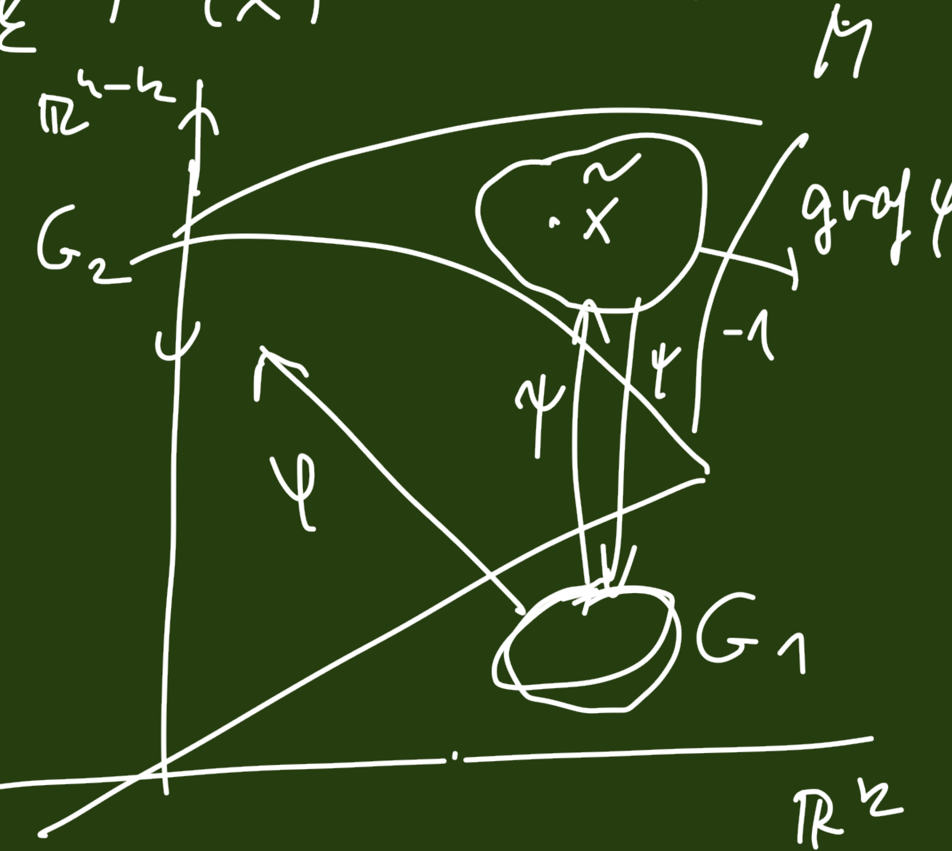
IDEA:

$F'(\tilde{x})$

DEF

$\Psi : G_1 \to \mathbb{R}^m$

$\Psi(u) = (u, \varphi(u))$



BÚNO předpokládáme, že matice
$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_{k+1}}(\tilde{x}) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(\tilde{x}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_{n-k}}{\partial x_{k+1}}(\tilde{x}) & \dots & \frac{\partial F_{n-k}}{\partial x_n}(\tilde{x}) \end{pmatrix}$$
neboť víme, že $F'(x)$, která je typu $(n-k)\times n$, obsahuje regulární submatici $(n-k)\times(n-k)$. Podle VOIF $\exists\, G_1 \subset \mathbb{R}^k$, $G_2 \subset \mathbb{R}^{n-k}$ otevřené a $\varphi : G_1 \to G_2$ tak, že

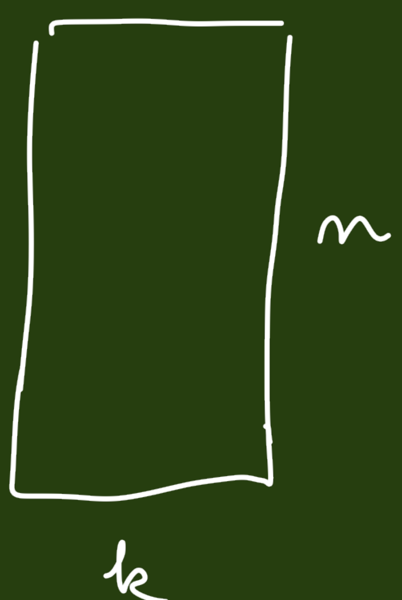
- $\tilde{x} \in G_1 \times G_2$,
- $\varphi \in \mathcal{C}^1(G_1)$,
- $\operatorname{graf} \varphi = M \cap (G_1 \times G_2)$

<u>Definujme</u> $\psi : G_1 \to \mathbb{R}^n$ předpisem
$$\psi(u) = (u, \varphi(u)) \quad \forall\, u \in G_1$$

CÍL: $\varphi : G_1 \to M$ je reg. homeomorfismus

víme: • φ je prosté, $\varphi \in C^1(G_1)$, $\varphi(G_1) = M \cap (G_1 \times G_2)$ ✓

• $\varphi'(u) =$



$$
\begin{array}{cl}
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 1 & & & 0 \\
\vdots & & & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & & 0 & 1 \\
\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(u) & \cdots & & & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_k}(u) \\
\vdots & & & & \\
\frac{\partial \varphi_{n-k}}{\partial x_1}(u) & \cdots & & & \frac{\partial \varphi_{n-k}}{\partial x_k}(u)
\end{pmatrix}
&
\begin{array}{l}
\left.\vphantom{\begin{matrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{matrix}}\right\updownarrow k \\
\left.\vphantom{\begin{matrix}1\\ \vdots\\0\end{matrix}}\right\updownarrow n-k
\end{array}
\end{array}
$$

tedy rank $\varphi'(u) = k$, takže φ je regulární

• $\varphi^{-1} : M \cap (G_1 \times G_2) \to \mathbb{R}^k$ je zúžení projekce $\mathbb{R}^n$ na $\mathbb{R}^k$ na $M \cap (G_1 \times G_2)$. Tedy φ^{-1} je spojité, takže φ je homeomorfismus.

CELKEM: φ je reg. hom. G_1 na $M \cap (G_1 \times G_2)$, $\tilde{x} \in G_1 \times G_2$ a $M \cap (G_1 \times G_2)$ je ot. M. Takže M je k-plocha v $\mathbb{R}^n$. □

PŘÍKLAD. Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $r > 0$. Dokažte, že $S_n(o,r)$ je $(n-1)$-plocha v $\mathbb{R}^n$.

Řešení. Položme $H = \mathbb{R}^n$ a $F : H \to \mathbb{R}$, $F(x) = \|x\| - r$.

Potom
- H je ot. v $\mathbb{R}^n$, $F \in C^1(H \setminus \{o\})$
- $S_n(o,r) = \{x \in \mathbb{R}^n;\ F(x) = 0\}$
- $F'(x) = \nabla F(x) = \dfrac{x}{\|x\|}$, $x \neq o$,

(neboť $$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial}{\partial x_i}\sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2} = \frac{1}{2\sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2}} \cdot 2x_i = \frac{x_i}{\|x\|}$$)

- $\operatorname{rank} F'(x) = 1$

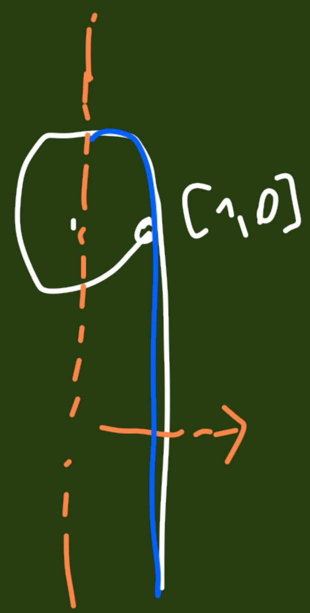
Tedy $S_n(o,r)$ je $(n-1)$-plocha podle Věty 20.13.

POZNÁMKA. Místo $F(x) = \|x\| - r$ lze použít jiné funkce, např. $G(x) = \|x\|^2 - r^2$, pak $G'(x) = 2x$ (dokonce pro $x \in \mathbb{R}^n$).

PŘÍKLAD.

$G=(-5,2\pi)$, $\varphi: G\to\mathbb{R}^2$, $\varphi(t)=\begin{cases}\begin{pmatrix}1\\ t\end{pmatrix}, & t\in(-5,0]\\ \begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}, & t\in(0,2\pi)\end{cases}$,

$M=\varphi(G)$



Dokažte, že φ je prosté a regulární, ale není to homeomorfismus.

Řešení.

φ prosté, reg. ... cvičení

- φ^{-1} není spojité: • označme $A=\{x\in M,\ x_1>0\}$, potom A je souvislá (cvičení), ale $\varphi^{-1}(A)=(-5,\frac{\pi}{2})\cup(\frac{3\pi}{2},2\pi)$, ta souvislá není, takže φ^{-1} není spojité
- $H=(-5,\frac{\pi}{2})$, pak H je ot. v G, ale $\varphi(H)$ (modrý kus) není ot. v M, takže φ^{-1} není spojité

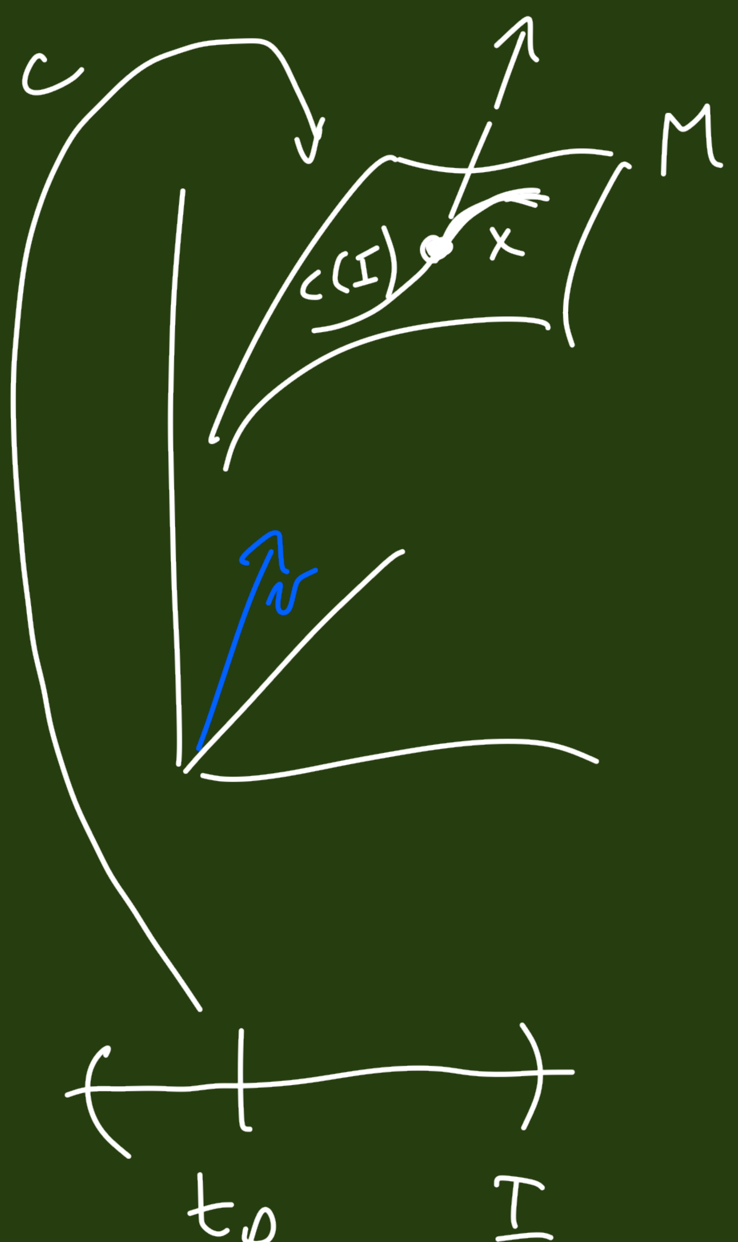
$x^\mu \to [1,0]$,

pak $\varphi^{-1}(x^\mu) \to 2\pi$,

ale $\varphi^{-1}([1,0]) = 0$

$\Rightarrow \varphi^{-1}$ není spojité!

DEFINICE. Nechť $k, n \in \mathbb{N}$, $k \le n$, $M \subset \mathbb{R}^n$ je k-plocha, $x \in M$ a $v \in \mathbb{R}^n$. Řekneme, že v je *tečný vektor* k M v x, jestliže existují otevřený interval I, spojité zobrazení $c : I \to M$ a $t_0 \in I$ splňující $c(t_0) = x$ a $c'(t_0) = v$. Množina všech tečných vektorů k M v x se nazývá *tečný prostor* k M v x a značíme ji $T_x(M)$.



Věta 20.14 (popis tečného prostoru). Nechť $k, n \in \mathbb{N}$, $k \leq n$, $M \subset \mathbb{R}^n$ je k-plocha a $x \in M$.

(a) Potom $T_x(M)$ je k-dimensionální vektorový podprostor $\mathbb{R}^n$.

(b) Nechť $G \subset \mathbb{R}^k$ je otevřená množina, $a \in G$, $\varphi : G \to \mathbb{R}^n$ je regulární homeomorfismus, $x = \varphi(a)$, $\varphi(G) \subset M$ a $\varphi(G)$ je otevřená podmnožina M. Potom

$$\varphi'(a)\left(\mathbb{R}^k\right) = T_x(M).$$

Důkaz. (a) plyne z (b), protože $\varphi'(a)(\mathbb{R}^k)$ je k-dim vekt. podprostor $\mathbb{R}^n$.

(b) v pondělí 6.4.