VEKTOROVÝ SOUČIN

$n \geq 2$, $u^1, \dots, u^{n-1} \in \mathbb{R}^n$,

$$u^1 \times \dots \times u^{n-1} = \left(\det \left(e^i, u^1, \dots, u^{n-1} \right) \right)_{i=1}^{n}, \quad n \geq 3$$

$$u^1 \times = (u^1_2, -u^1_1)$$

Poznámky (a) $u^1 \times \dots \times u^{n-1} \perp u^i \quad \forall i \in \{1, \dots, n-1\}$

(b) lichá permutace činitelů $\Rightarrow$ změna znaménka

např. $u, v \in \mathbb{R}^3$: $\quad u \times v = - v \times u$

sudá permutace činitelů $\Rightarrow$ součin zůstává nezměněn

(c)

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \det \begin{pmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{pmatrix} \\ -\det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{pmatrix} \\ \det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

<u>POZNÁMKA.</u> Z Věty 20.12 (d) plyne:

$n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $G \subset \mathbb{R}^{n-1}$ otevřená, $\varphi : G \to \mathbb{R}^n$ prostá, reg., pak

$$\operatorname{vol} \varphi'(t) = \operatorname{vol}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t_1}(t), \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial t_{n-1}}(t)\right) = \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial t_1}(t) \times \dots \times \frac{\partial \varphi}{\partial t_{n-1}}(t) \right\| .$$

Tedy area formule pro $k = n-1$:

$$\int_{\varphi(G)} f \, d\mathcal{H}^{n-1} = \int_G f(\varphi(t)) \cdot \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial t_1}(t) \times \dots \times \frac{\partial \varphi}{\partial t_{n-1}}(t) \right\| d\lambda^{n-1}(t),$$

kde $f : \varphi(G) \to \mathbb{R}$ je borelovská.

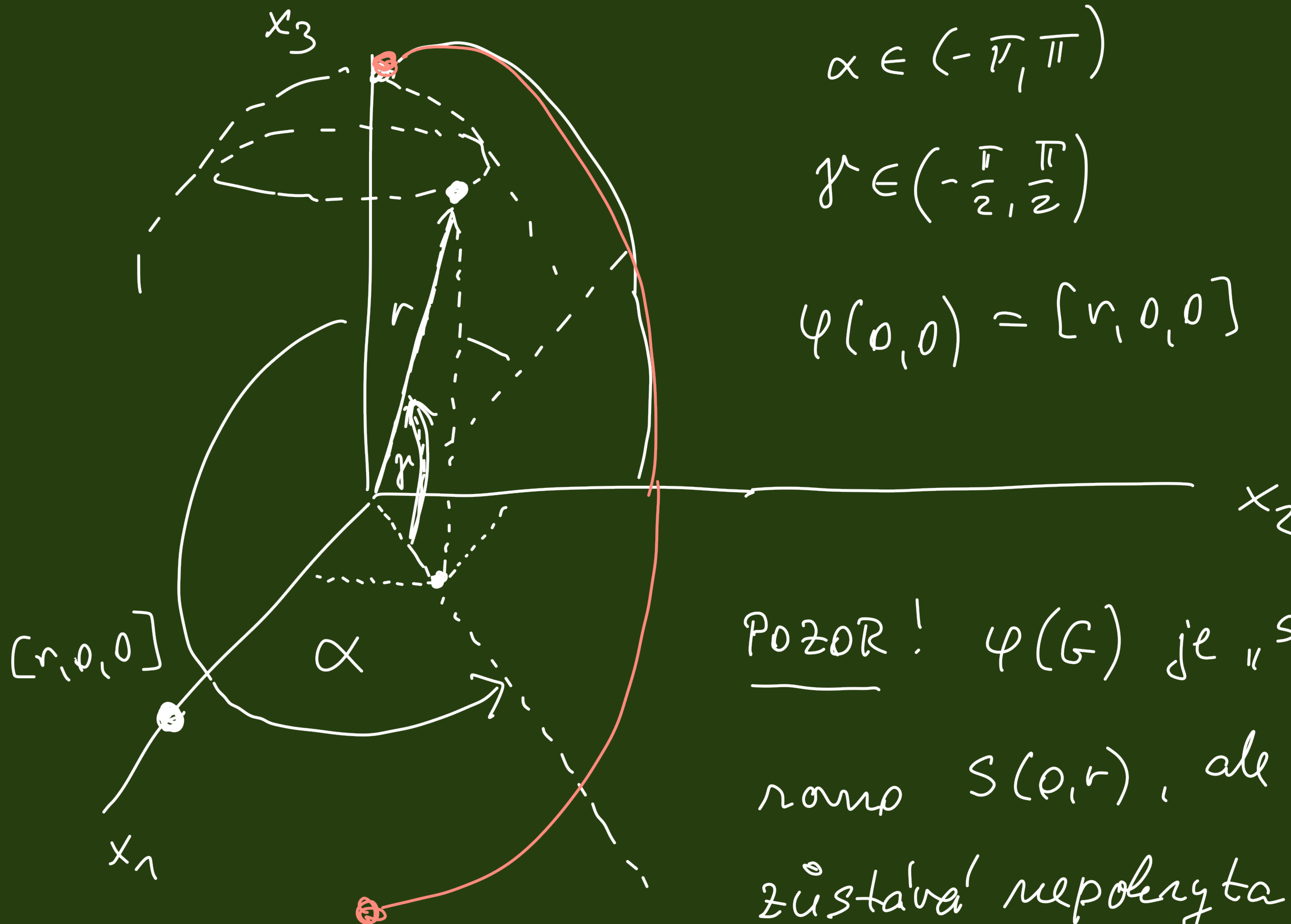
PŘÍKLAD. Nechť $r > 0$. Spočtěte povrch sféry

$$S(0,r) = \{x \in \mathbb{R}^3 ;\ \|x\| = r\}.$$

Řešení. Položme $G = (-\pi, \pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ a definujme $\varphi : G \to \mathbb{R}^3$ předpisem

$$\varphi(\alpha, \gamma) = \begin{pmatrix} r \cos\alpha \cos\gamma \\ r \sin\alpha \cos\gamma \\ r \sin\gamma \end{pmatrix}, \quad (\alpha, \gamma) \in G$$

(sférické souřadnice v $\mathbb{R}^3$).



$\alpha \in (-\pi, \pi)$

$\gamma \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$\varphi(0,0) = [r,0,0]$

<u>POZOR</u>! $\varphi(G)$ je „skoro" rovno $S(0,r)$, ale část zůstává nepokryta, doufejme, že bude $\mathcal{H}^2$-míry 0

Označme $A_1 = \varphi(G)$, $A_2 = \{[x_1, x_2, x_3] \in S(0,r);\ x_2 = 0,\ x_1 \leq 0\}$.

Pak $\mathcal{H}^2(S(0,r)) = \mathcal{H}^2(A_1) + \mathcal{H}^2(A_2)$. Jest

$$\mathcal{H}^2(A_1) = \int_{\varphi(G)} 1 \, d\mathcal{H}^2 \overset{AF}{=} \int_G \operatorname{vol} \varphi'(t) \, d\lambda^2(t)$$

$$= \int_G \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}(\alpha, \gamma) \times \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma}(\alpha, \gamma) \right\| d\lambda^2(\alpha, \gamma)$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}(\alpha, \gamma) \times \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma}(\alpha, \gamma) \right\| d\gamma \, d\alpha .$$

$$\varphi(\alpha, \gamma) = \begin{pmatrix} r\cos\alpha\cos\gamma \\ r\sin\alpha\cos\gamma \\ r\sin\gamma \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}(\alpha, \gamma) = \begin{pmatrix} -r\sin\alpha\cos\gamma \\ r\cos\alpha\cos\gamma \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial\gamma}(\alpha, \gamma) = \begin{pmatrix} -r\cos\alpha\sin\gamma \\ -r\sin\alpha\sin\gamma \\ r\cos\gamma \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -r\sin\alpha\cos\gamma \\ r\cos\alpha\cos\gamma \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r\cos\alpha\sin\gamma \\ -r\sin\alpha\sin\gamma \\ r\cos\gamma \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} r^2\cos\alpha\cos^2\gamma \\ r^2\sin\alpha\cos^2\gamma \\ r^2\sin\gamma\cos\gamma \end{pmatrix} = \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} \times \frac{\partial\varphi}{\partial\gamma}$$

$$\begin{pmatrix} r^2 \cos\alpha \cos^2\gamma \\ r^2 \sin\alpha \cos^2\gamma \\ r^2 \sin\gamma \cos\gamma \end{pmatrix}$$

Tedy

$$\left\| \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} \times \frac{\partial\varphi}{\partial\gamma} \right\|^2 = r^4\cos^2\alpha\cos^4\gamma + r^4\sin^2\alpha\cos^4\gamma + r^4\sin^2\gamma\cos^2\gamma$$

$$= r^4\cos^4\gamma + r^4\sin^2\gamma\cos^2\gamma = r^4\cos^2\gamma,$$

takže $\left\| \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} \times \frac{\partial\varphi}{\partial\gamma} \right\| = r^2\cos\gamma.$

Tedy $$\mathcal{H}^2(A_1) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^2 \cos\varphi \, d\varphi \, d\alpha$$

$$= 2\pi r^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\varphi \, d\varphi = 2\pi r^2 \left[\sin\varphi\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \underline{\underline{4\pi r^2}}.$$

<u>Dokážeme, že $\mathcal{H}^2(A_2) = 0$.</u>

K tomu stačí dle Věty 20.7 (c): $\mathcal{H}^1(A_2) < \infty$.

K tomu: $\begin{cases} \text{buď } A_2 \text{ je lipschitzovským obrazem množiny konečné } \mathcal{H}^1\text{-míry a Věta 20.7 (b),} \\ \text{nebo spočítáme } \mathcal{H}^1(A_2) \text{ (odhadneme)} \end{cases}$

ad „bud": $A_2 = \psi([0,2\pi])$, kde $\psi(t) = \begin{pmatrix} -r\cos t \\ 0 \\ r\sin t \end{pmatrix}$

ψ lze def. naps. na $(-\pi, 3\pi)$, to je ot. množina v $\mathbb{R}$, $\psi \in C^1((-\pi, 3\pi))$, tedy má om. derivaci na $[0,2\pi]$, tedy je lip. na $[0,2\pi]$, tedy $\mathcal{H}^1(A_2) < \infty$, tedy $\mathcal{H}^2(A_2) = 0$.

ad „nebo": $A_2 = A_{21} \cup A_{22}$, $A_{21} = \{[0,0,r], [0,0,-r]\}$,

pak $\mathcal{H}^1(A_{21}) = 0$, položme $A_{22} = A_2 \setminus A_{21}$,

$H = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $\varphi : H \to \mathbb{R}^3$, $\varphi(t) = \begin{pmatrix} -r\cos t \\ 0 \\ r\sin t \end{pmatrix}$. Potom

H je ot. v $\mathbb{R}$, φ je prosté, C^1, $\varphi(H) = A_{22}$,

$\varphi'(t) = \begin{pmatrix} r\sin t \\ 0 \\ r\cos t \end{pmatrix}$, $\operatorname{vol} \varphi'(t) = \|\varphi'(t)\| = r \quad \forall t$,

také φ je reg., a tedy $\mathcal{H}^1(A_{21}) \overset{AF}{=} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r\,dt = \pi r < \infty$,

takže $\mathcal{H}^2(A_{21}) = 0$.

20.3. KŘIVKY, PLOCHY A JEJICH ORIENTACE

DEFINICE. Nechť $n, k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$, a $M \subset \mathbb{R}^n$ je neprázdná. Řekneme, že M je *k-dimenzionální plocha* (*k-plocha*) v $\mathbb{R}^n$, jestliže pro každé $x \in M$ existuje $G \subset \mathbb{R}^k$ otevřená a regulární homeomorfismus $\varphi : G \to \mathbb{R}^n$ taková, že $x \in \varphi(G)$, $\varphi(G) \subset M$ a $\varphi(G)$ je otevřená v M.

POZNÁMKA. Je-li $G \subset \mathbb{R}^k$ otevřená a neprázdná, $\varphi : G \to \mathbb{R}^n$ je regulární homeomorfismus, pak $\varphi(G)$ je k-plocha.

(Neboť $\varphi(G)$ je otevřená v $\varphi(G)$.)

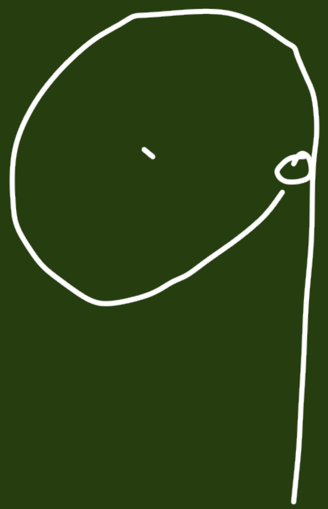
CÍL: Chceme rozhodnout, zda

1) $\{0\} \times (0,1)^2$ je 2-plocha v $\mathbb{R}^3$

2) $G = (-5, 2\pi)$

$\varphi : G \to \mathbb{R}^2$

$$\varphi(t) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}, & t \in (-5, 0] \\ \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, & t \in (0, 2\pi) \end{cases}$$



Je to 1-plocha v $\mathbb{R}^2$?